Η μέθοδος του Ταμπλό

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε μια κομψή και αποτελεσματική μέθοδο, για τον έλεγχο της λογικής εγκυρότητας (ενός τύπου) μιας πρότασης του προτασιακού λογισμού.
Η μέθοδος, όπως θα δούμε παρακάτω, μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση του κατηγορικού λογισμού.

Ο τρόπος εργασίας με την μέθοδο αυτή, περιγράφεται με τους παρακάτω δύο πίνακες (ταμπλό) και τους αντίστοιχούς τους κανόνες:

Τύποι συζευκτικής μορφής

α	α_1	α_2
$x \wedge y$	x	y
$\sim(x \vee y)$	$\sim x$	$\sim y$
$\sim(x \to y)$	x	$\sim y$
$\sim\sim x$	x	x

Κανόνας Α. $\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array}$

Τύποι διαζευκτικής μορφής

β	β_1	β_2
$\sim(x \wedge y)$	$\sim x$	$\sim y$
$x \vee y$	x	y
$x \to y$	$\sim x$	y

Κανόνας Β. $\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\beta} \\ \hline \beta_1 & \beta_2 \end{array}$

Σχόλια:

1) Το πρώτο ταμπλό, δηλώνει ότι ένας τύπος της μορφής α (συζευκτικής μορφής) είναι αληθής, αν και μόνο αν οι συνιστώσες του α_1, α_2 είναι αμφότερες αληθείς.
Δηλ. α αληθής ανν α_1 και α_2 αληθείς. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου, δηλώνουμε αυτό το "και", γράφοντας τις συνιστώσες α_1, α_2 του α κατακόρυφα κάτω από το α.

2) Το δεύτερο ταμπλό, δηλώνει ότι ένας τύπος της μορφής β (διαζευκτικής μορφής) είναι αληθής, αν και μόνο αν, μια τουλάχιστον από τις συνιστώσες του β_1, β_2 είναι αληθής.
Δηλ. β αληθής ανν β_1 ή β_2 αληθής.

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου, διακλαδώνομε αυτό το "ή" δημιουργώντας μια διακλάδωση κάτω από τον τύπο b :

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ \swarrow & & \searrow \\ b_1 & & b_2 \end{array}$$

ή απλούστερα γράφοντας οριζόντια κάτω από το b τις συνιστώσες του b_1, b_2.

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ b_1 & & b_2 \end{array}.$$

Η ιδέα τώρα της μεθόδου είναι η εξής:

Έστω ότι θέλω να ελέγξω την λογική εγκυρότητα της πρότασης Q.

Ξεκινώντας με την άρνηση $\sim Q$ της πρότασης, εφαρμόζομε σταδιακά τους κανόνες A και B.

Αν κατά την διαδικασία αυτή εμφανισθούν σε ένα κλάδο (μονοπάτι) η πρόταση P και η $\sim P$ τότε λέμε ότι το "μονοπάτι" αυτό είναι κλειστό διότι οδηγεί σε αντίφαση.

Αν όλα τα μονοπάτια που θα προκύψουν είναι κλειστά είναι σαν να λέμε ότι η υπόθεση $\sim Q$ οδηγεί σε άτοπο, πράγμα που σημαίνει ότι η Q πρέπει να είναι λογικά έγκυρη. (Ας σημειωθεί ότι αυτό που περιγράφουν τα δυο ταμπλό με τους αντίστοιχους κανόνες τους, παραμένει ορθό κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία των προτάσεων τύπου a ή b.)

Αν εμφανισθεί κάποιο μονοπάτι που δεν κλείνει (ανοικτό μονοπάτι), αυτό θα σημαίνει ότι η πρόταση Q δεν είναι λογικά έγκυρη (ταυτολογία). Στην περίπτωση αυτή μάλιστα η μέθοδος μπορεί να μας προμηθεύσει και με μια ερμηνεία (απόδοση δηλαδή αληθοτιμών στα άτομα της Q) κάτω από την οποία η $\sim Q$ είναι αληθής (και επομένως η Q ψευδής).

Το γεγονός ότι ένα μονοπάτι κλείνει σημειώνεται με ένα X στο τέρμα του.

παράδειγμα 1. Θα δείξουμε ότι ο τύπος $[p \vee (q \wedge \tau)] \to [(p \vee q) \wedge (p \vee \tau)]$ είναι λογικά έγκυρα

απόδειξη

(1) $\sim\left([p \vee (q \wedge \tau)] \to [(p \vee q) \wedge (p \vee \tau)]\right)$

(2) $p \vee (q \wedge \tau)$

(3) $\sim[(p \vee q) \wedge (p \vee \tau)]$

(4) $\sim(p \vee q)$		(5) $\sim(p \vee \tau)$	
(6) $\sim p$		(12) $\sim p$	
(7) $\sim q$		$\sim \tau$	
(8) p	(9) $q \wedge \tau$	(13) p	(14) $q \wedge \tau$
×	(10) q	×	(15) q
	(11) τ		(16) τ
	×		×

παράδειγμα 2. Να αποδειχθεί ο τύπος $[p \to (q \to \tau)] \to [(p \to q) \to (p \to \tau)]$

απόδειξη

(1) $\sim\left([p \to (q \to \tau)] \to [(p \to q) \to (p \to \tau)]\right)$

$(2)_1$ $p \to (q \to \tau)$

$(3)_1$ $\sim[(p \to q) \to (p \to \tau)]$

$(4)_3$ $p \to q$

$(5)_3$ $\sim(p \to \tau)$

$(6)_5$ p

$(7)_5$ $\sim \tau$

$(8)_2$ $\sim p$	$(9)_2$ $q \to \tau$		
×	$(10)_9$ $\sim q$		$(11)_9$ τ
	$(12)_4$ $\sim p$	$(13)_4$ q	×
	×	×	

* Ο κάτω δείκτης που μπαίνει στον αριθμό των προτάσεων δείχνει από ποιά πρόταση έχει προκύψει με εφαρμογή των κανόνων A και B

π.χ ο συμβολισμός $(4)_3$ δηλώνει ότι η (4) έχει προκύψει από την (3) με εφαρμογή του κατάλληλου κανόνα.

Παράδειγμα 3 Να ελέγξετε αν η πρόταση $(p \vee q) \rightarrow p \wedge q$ είναι λογικά έγκυρη

<u>Λύση</u>

$(1)\ \sim[(p \vee q) \rightarrow p \wedge q]$

$(2)_1\quad p \vee q$

$(3)_1\quad \sim(p \wedge q)$

$(4)_2\quad p \qquad\qquad (5)_2\quad q$

$(6)_3\ \sim p \quad (7)_3\ \sim q \qquad (8)_3\ \sim p \quad (9)_3\ \sim q$

$\times \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times$

Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε ότι υπάρχουν δυο ανοικτά μονοπάτια. Άρα η πρόταση δεν είναι ταυτολογία. Μάλιστα αν π.χ. η p είναι αληθής και η q είναι ψευδής τότε $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ είναι ψευδής. Επίσης ψευδής είναι και στην περίπτωση που η q είναι αληθής και p ψευδής.

ασκήσεις Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτολογίες

(1) $q \rightarrow (p \rightarrow q)$

(2) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

(3) $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow p \rightarrow (q \wedge r)$

(4) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \vee q)] \rightarrow r$

(5) $\sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

(6) $\sim(p \vee q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

(7) $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(p \wedge q)$

(8) $[p \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.