

Η μέθοδος του Ταμπλό

Σε μια παράγραφο αλλιώς θα περιγράφαμε μια κομψή και αποτελεσματική μέθοδο, για τον έλεγχο της λογικής εγκυρότητας (ενός ζεύγους) μιας πρότασης του προτασιακού λογισμού.

Η μέθοδος, όπως θα δούμε παρακάτω, μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση του κванτιφορικού λογισμού.

Ο τρόπος εργασίας με την μέθοδο αλλιώς, περιγράφεται με τους παρακάτω δύο πίνακες (ταμπλό) και τους αντίστοιχούς τους κανόνες:

Τύποι αλγεβρικής μορφής

| α | α_1 | α_2 | Κανόνες A - α |
|-------------------------|------------|------------|----------------------|
| $x \wedge y$ | x | y | α_1 |
| $\neg(x \vee y)$ | $\neg x$ | $\neg y$ | α_2 |
| $\neg(x \rightarrow y)$ | x | $\neg y$ | |
| $\neg \neg x$ | x | x | |

Τύποι διαζευκτικής μορφής

| β | β_1 | β_2 | Κανόνες B - β |
|--------------------|-----------|-----------|------------------------|
| $\neg(x \wedge y)$ | $\neg x$ | $\neg y$ | $\beta_1 \mid \beta_2$ |
| $x \vee y$ | x | y | |
| $x \rightarrow y$ | $\neg x$ | y | |

Σχόλια:

1) Το πρώτο ταμπλό, δηλώνει ότι ένας ζεύγος, της μορφής α (αλγεβρικής μορφής) είναι αληθής, αν και μόνο αν οι συνιστώσες τους α_1, α_2 είναι αληθύτερες αληθείς.

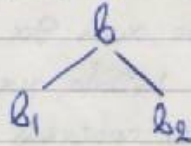
Δηλ. α αληθής ανν α_1 και α_2 αληθείς. Κάθε την εφαρμογή της μεθόδου, δηλώνουμε αντά το "και", δράφοντας τις συνιστώσες α_1, α_2 του α , κκεκακέρφα κέσω από το α .

2) Το δεύτερο ταμπλό, δηλώνει ότι ένας ζεύγος, της μορφής β (διαζευκτικής μορφής) είναι αληθής, αν και μόνο αν, μια συνιστώσα από τις συνιστώσες τους β_1, β_2 είναι αληθής.

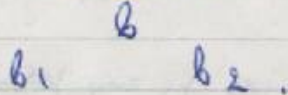
Δηλ. β αληθής ανν $\beta_1 \underline{\vee} \beta_2$ αληθείς.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΑΜΠΛΟ ΣΤΗΝ ΛΟΓΙΚΗ
Γιώργος Κασαπίδης-Μαθηματικός

Κάθε την εφαρμογή της μεθόδου, ξεκινάμε από
το "ή" διαχωρίζοντας μια διακλάδωση κάτω από
το α στο β :



ή κληρονομικά γραμμών ορίζονται κάτω από
το β τις συνιστώσες α_1, α_2 .



Η ιδέα αυτή της μεθόδου είναι η εξής:

Έστω ότι θέλω να ελέγξω την λογική εγκυρότητα
της πρότασης α

Ξεκινώντας με την άρνηση $\neg \alpha$ της πρότασης, εφαρμόζω
βασικά της κανόνες A και B .

Αν κατά την διαδικασία αυτή εμφανιστεί σε έναν
κλάδο (μονοπάτι) η πρόταση P και $\neg P$ τότε λέμε
ότι το "μονοπάτι" αυτό είναι κλειστό δηλ οδηγεί σε αντίφαση.

Αν όλα τα μονοπάτια που θα προκύψουν είναι κλειστά
είναι σαν να λέμε ότι η υπόθεση $\neg \alpha$ οδηγεί σε
άδικο, πράγμα που σημαίνει ότι η α πρέπει να είναι
λογικά έγκυρη. (As γίνεται ότι αυτό που περιγράψαμε
στα δύο σημεία με τις κλειστούς κανόνες της, παραμένει
ορθό κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία των προτάσεων
είναι α ή β .)

Αν εμφανιστεί κάποιο μονοπάτι που δεν κλείνει
(ανοικτό μονοπάτι), αυτό θα σημαίνει ότι η πρόταση α
δεν είναι λογικά έγκυρη (ταυτολογία). Στην περίπτωση
αυτήν κλείνεται η μέθοδος μπορεί να μας προημεριώσει και
με μια ερμηνεία (απόδοση διακριτή κληρονομία σε
μέλη της α) κάτω από την οποία α και $\neg \alpha$ είναι
αληθείς (και επομένως η α ψευδής).

Το γεγονός ότι ένα μονοπάτι κλείνει σημαίνει ότι
με ένα \times στο τέλος του.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΑΜΠΛΟ ΣΤΗΝ ΛΟΓΙΚΗ
Γιώργος Κασαπίδης-Μαθηματικός

παράδειγμα 1. Θα δείξουμε ότι ο τύπος $[P \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(P \vee q) \wedge (P \vee r)]$
είναι λογικά έγκυρος

απόδειξη

| | | | |
|---|-----------------------|--------|------------|
| (1) $\sim ([P \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(P \vee q) \wedge (P \vee r)])$ | | | |
| (2) $P \vee (q \wedge r)$ | | | |
| (3) $\sim [(P \vee q) \wedge (P \vee r)]$ | | | |
| (4) $\sim (P \vee q)$ | (5) $\sim (P \vee r)$ | | |
| (6) $\sim P$ | (12) $\sim P$ | | |
| (7) $\sim q$ | $\sim r$ | | |
| (8) P | (9) q ∧ r | (13) P | (14) q ∧ r |
| X | (10) q | X | (15) q |
| | (11) r | | (16) r |
| | X | | X |

παράδειγμα 2. Να αποδειχθεί ο τύπος $[P \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(P \rightarrow q) \rightarrow (P \rightarrow r)]$
απόδειξη

| | | | |
|--|------------------------------------|---------------------|---|
| (1) $\sim ([P \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(P \rightarrow q) \rightarrow (P \rightarrow r)])$ | | | |
| (2) _i $P \rightarrow (q \rightarrow r)$ | | | |
| (3) _i $\sim [(P \rightarrow q) \rightarrow (P \rightarrow r)]$ | | | |
| (4) ₃ $P \rightarrow q$ | | | |
| (5) ₃ $\sim (P \rightarrow r)$ | | | |
| (6) ₅ $\sim P$ | | | |
| (7) ₅ $\sim r$ | | | |
| (8) ₂ $\sim P$ | (9) ₂ $q \rightarrow r$ | | |
| X | (10) ₉ $\sim q$ | (11) ₉ r | |
| | (12) ₄ $\sim P$ | (13) ₄ q | X |
| | X | X | |

* Ο κύριος δείκτης που φαίνεται στον αριθμό της προτάσεως
δείχνει από ποιά πρόταση έχει προκύψει με εφαρμογή των
κανόνων A και B

π.χ ο συμπληρωτής (4)₃ δείχνει ότι η (4) έχει προκύψει
από την (3) με εφαρμογή των κατάλληλων κανόνων.

Παράδειγμα 3 Να ελέγξετε αν η πρόταση $(P \vee q) \rightarrow P \wedge q$ είναι λογικά έσχυρη
Λύση

| | | | |
|-----|--|-----|----------|
| (1) | $\sim [(P \vee q) \rightarrow P \wedge q]$ | | |
| (2) | $P \vee q$ | | |
| (3) | $\sim (P \wedge q)$ | | |
| (4) | P | (5) | q |
| (6) | $\sim P$ | (7) | $\sim q$ |
| | X | | X |

Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο κεντρικά μονοπάτια. Άρα η πρόταση δεν είναι ταυτολογία. Μάλιστα αν π.χ η P είναι αληθής και η q είναι ψευδής τότε $P \vee q \rightarrow P \wedge q$ είναι ψευδής.

Επίσης ψευδής είναι και στην περίπτωση που η q είναι αληθής και P ψευδής.

αδκλήσεις Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτολογίες

- (1) $q \rightarrow (P \rightarrow q)$
- (2) $[(P \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow z)] \rightarrow (P \rightarrow z)$
- (3) $[(P \rightarrow q) \wedge (P \rightarrow z)] \rightarrow P \rightarrow (q \wedge z)$
- (4) $[(P \rightarrow z) \wedge (q \rightarrow z) \wedge (P \vee q)] \rightarrow z$
- (5) $\sim (P \wedge q) \rightarrow (\sim P \vee \sim q)$
- (6) $\sim (P \vee q) \rightarrow (\sim P \wedge \sim q)$
- (7) $(\sim P \vee \sim q) \rightarrow \sim (P \wedge q)$
- (8) $[P \vee (q \wedge z)] \rightarrow [(P \vee q) \wedge (P \vee z)]$