ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

Κασαπίδης Γεώργιος- Μαθηματικός

1. $\forall \alpha, \beta \in \Re$ **ισχύει ημα ημβ ≤ ημ$^2 \frac{\alpha+\beta}{2}$**

Απόδειξη

ημα ημβ ≤ ημ$^2 \frac{\alpha+\beta}{2}$ $\Leftrightarrow$ ημα ημβ ≤ $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}$ $\Leftrightarrow$ 2ημα ημβ ≤ 1- συν (α+β) $\Leftrightarrow$

2ημα ημβ ≤ 1- συνα συνβ +ημα ημβ $\Leftrightarrow$ συν(α-β)≤ 1

2. $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, \pi)$ **ισχύει: ημα ημβ ημγ ημ δ ≤ ημ$^4 \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}$**

Απόδειξη

Σύμφωνα με την 1 έχουμε: ημα ημβ ≤ημ$^2 \frac{\alpha+\beta}{2}$

ημγ ημδ ≤ ημ$^2 \frac{\gamma+\delta}{2}$

ημ $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ημ $\frac{\gamma+\delta}{2}$ ≤ ημ$^2 \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}$

δεδομένου ότι ημα,ημβ,ημγ,ημδ >0 με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε το ζητούμενο.

3. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in$ **(0,π) ισχύει ημα ημβ ημγ ≤ ημ$^3 \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$**

Απόδειξη

Σύμφωνα με την 2 έχουμε

$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, \pi)$ ισχύει: ημα ημβ ημγ ημ δ ≤ ημ$^4 \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}$

Θέτουμε τώρα δ=$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ οπότε προκύπτει

ημα ημβ ημγ ημ $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ ≤ ημ$^4 \frac{4\alpha+4\beta+4\gamma}{12}$ και τελικά

ισχύει ημα ημβ ημγ ≤ ημ$^3 \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$.

4. **Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ημΑ ημΒ ημΓ ≤ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$**

Απόδειξη

Σύμφωνα με την 3, δεδομένου ότι Α+Β+Γ=π , προκύπτει το ζητούμενο.

Αν Ε είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ τότε η ανισότητα
ημΑ ημΒ ημΓ $\leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ με βάση τον νόμο των ημιτόνων $\frac{\alpha}{\eta\mu \mathrm{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu \mathrm{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$

και τον τύπο εμβαδού Ε=$\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$,όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου , παίρνει την εξής ισοδύναμη γεωμετρική μορφή της:

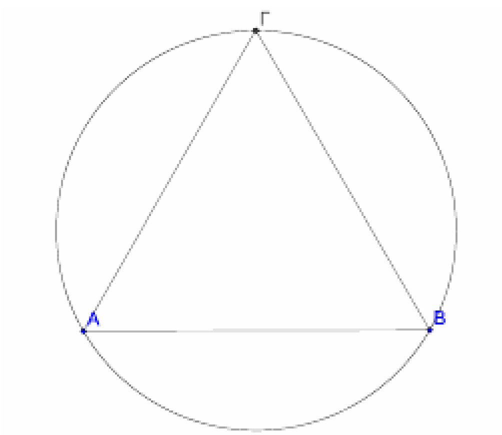
$$\mathrm{E} \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

Το δεύτερο μέλος της παραπάνω ανίσωσης εκφράζει το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R.

Άρα η **ανίσωση ημΑ ημΒ ημΓ** $\leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ **είναι ισοδύναμη με την γεωμετρική πρόταση ότι απ' όλα τα τρίγωνα τα εγγεγραμμένα σε κύκλο, το ισόπλευρο τρίγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.**

Ιδού μια απλή γεωμετρική απόδειξη

Ας είναι ΑΒΓ ένα εγγεγραμμένο σε κύκλο τρίγωνο και ας υποθέσουμε ότι η πλευρά ΑΒ είναι σταθερή. Τότε το τρίγωνο αποκτά μέγιστο εμβαδόν, όταν η κορυφή Γ ταυτιστεί με το μέσο του (μείζονος) τόξου ΑΒ (Οπότε το τρίγωνο αποκτά μέγιστο ύψος).

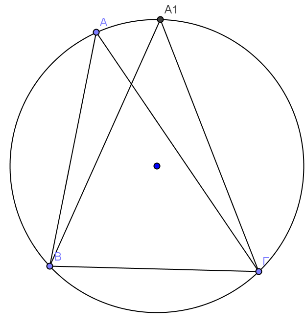


Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι και το Β πρέπει να είναι το μέσο του τόξου ΑΓ οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Πρόταση 1

Για κάθε μη ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ, υπάρχει ένα ισοσκελές με μεγαλύτερο εμβαδόν από το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου.

<u>Απόδειξη</u>



σχ.1

Αν ΑΒΓ είναι το αρχικό μη ισόπλευρο τρίγωνο τότε Αν A_1 είναι το μέσο του μείζονος τόξου ΒΓ το τρίγωνο $A_1ΒΓ$ είναι ισοσκελές και έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ΑΒΓ (αφού το αντίστοιχο ύψος προς την ΒΓ είναι μεγαλύτερο).
Αν ΑΒ=ΑΓ τότε μπορούμε να πάρουμε A_1 το μέσο του μείζονος τόξου ΑΒ οπότε (ΑΒΓ)<(A_1ΑΒ)

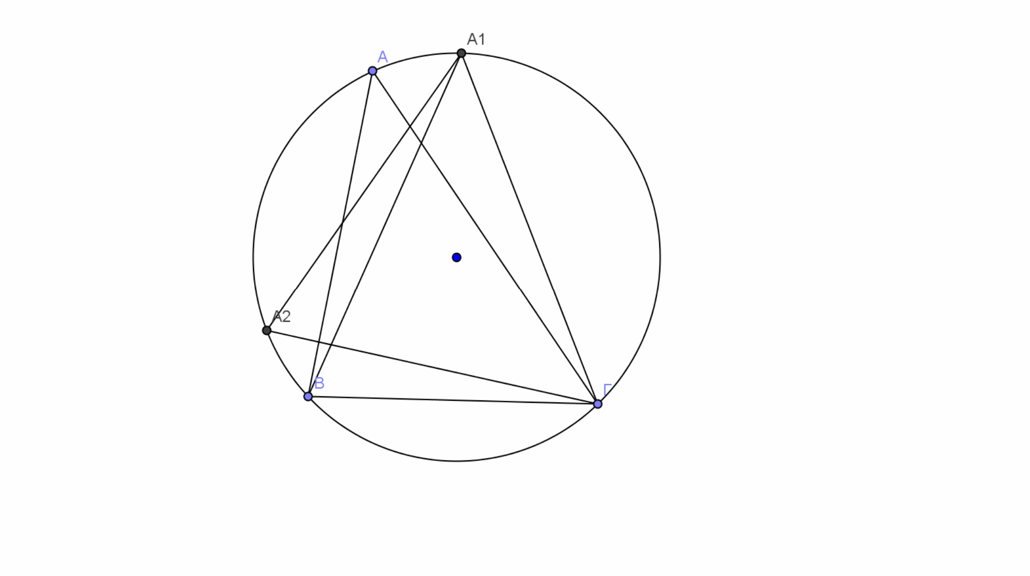
<u>Πρόταση 2</u>

Το εμβαδόν κάθε τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας ρ είναι μικρότερο ή ίσο από το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου που εγγράφεται στον κύκλο ρ.

<u>Απόδειξη</u>

Αν η πλευρά ΒΓ ισούται με την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο ρ, τότε το A_1ΒΓ είναι ισόπλευρο άρα το εμβαδόν του ΑΒΓ σύμφωνα με την πρόταση 1 είναι μικρότερο (ή ίσο αν η κορυφή Α ταυτίζεται με το A_1) από το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου

Όταν η πλευρά ΒΓ δεν ισούται με την πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου που εγγράφεται στον κύκλο ,τότε το A_1ΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο όπου για την γωνία A_1 έχουμε $A_1 \neq 60^0$ και (ΑΒΓ) ≤ (A_1ΒΓ). Θεωρώντας το μέσο A_2 του μείζονος τόξου A_1Γ το τρίγωνο $A_2A_1Γ$ είναι επίσης ισοσκελές και έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το A_1ΒΓ (σχ.2)

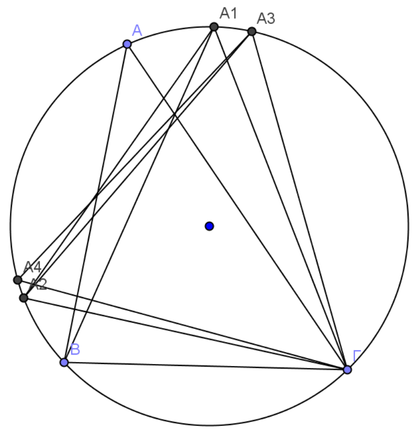


Σχ.2

Αν θέσουμε θ_1 το μέτρο της γωνίας A_1 και θ_2 το μέτρο της γωνίας A_2 , τότε ισχύει

$$\theta_2=A_2=B=90^0-\frac{\theta_1}{2} \quad \text{δηλαδή} \quad \theta_2=90^0-\frac{\theta_1}{2}$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί στο τρίγωνο $A_2A_1\Gamma$ δίνοντας ένα νέο ισοσκελές $A_3A_2\Gamma$ μεγαλύτερου εμβαδού και να ξανά εφαρμοστεί στο $A_3A_2\Gamma$ δίνοντας το ισοσκελές $A_4A_3\Gamma$ με $(A_4A_3\Gamma)>(A_3A_2\Gamma)$ κ.ο.κ. (σχ.3)



Σχ.3

Αν θ_ν συμβολίζει την γωνία της κορυφής και Εν το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου $A_\nu A_{\nu-1}\Gamma$ της δημιουργημένης ακολουθίας των ισοσκελών τριγώνων που δίνει η παραπάνω μέθοδος, τότε ισχύουν προφανώς οι εξής σχέσεις :

$$\theta_{\nu+1}=90^0 - \frac{\theta_\nu}{2} \quad \text{και } (AB\Gamma) \leq E_1<E_2<\ldots< E_\nu$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η ακολουθία των ισοσκελών τριγώνων που δημιουργείται συγκλίνει οριακά σε ισόπλευρο τρίγωνο δηλαδή ότι $\lim \theta_\nu=60^0$ όταν $\nu\to\infty$. Αυτό με την σειρά του μας δείχνει λόγω της παραπάνω ανισότητας ότι (ΑΒΓ)< $\frac{3\sqrt{3}\rho^2}{4}$ δηλαδή ότι το ισόπλευρο τρίγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν απ' όλα τα τρίγωνα που εγγράφονται στον κύκλο ακτίνας ρ.

Θέτουμε $\alpha_\nu = \theta_\nu - 60^0$. Τότε $\alpha_{\nu+1}=\theta_{\nu+1}-60^0=90^0-\frac{\theta_\nu}{2}-60^0=30^0-\frac{\theta_\nu}{2}=-\frac{a_\nu}{2}$

Δηλαδή η α_ν είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο -1/2 πράγμα που σημαίνει αν→0 άρα $\theta_\nu \to 60^0$. Ο.Ε.Δ.

Άλλη μια απόδειξη με την βοήθεια των μετρικών σχέσεων στα εμβαδά.

Στα παρακάτω R συμβολίζει την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου, ενώ $\rho, \rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ συμβολίζουν τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου.

1.Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να δειχτεί ότι R≥2ρ όπου το ίσο ισχύει αν και μόνο αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Απόδειξη

Έχουμε:

$$R \geq 2\rho \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma/4E \geq 2\,E/\tau \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma\tau \geq 8\,E^2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta\gamma\tau \geq 8\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta\gamma \geq 8\,(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) \quad (1)$$

θέτουμε τ-α=χ , τ-β=ψ , τ-γ=ζ τότε χ,ψ,ζ,>0 και χ+ψ+ζ=3τ-2τ=τ

επίσης έχουμε α=ψ+ζ ,β=ζ+χ , γ=χ+ψ οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με την

$(\chi+\psi)(\psi+\zeta)(\zeta+\chi) \geq 8\chi\psi\zeta$ (2) που ισχύει αφού

$$\chi+\psi \geq 2\sqrt{\chi\psi}$$
$$\psi+\zeta \geq 2\sqrt{\psi\zeta}$$
$$\zeta+\chi \geq 2\sqrt{\zeta\chi}$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη προκύπτει η (2) με το ίσο να ισχύει όταν χ=ψ=ζ⇔α=β=γ δηλαδή όταν το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

2.Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\boldsymbol{\rho_\alpha+\rho_\beta+\rho_\gamma = 4R+\rho}$$

Απόδειξη

Η δοθείσα σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{E}{\tau-\alpha}+\frac{E}{\tau-\beta}+\frac{E}{\tau-\gamma}=\frac{\alpha\beta\gamma}{E}+\frac{E}{\tau} \Leftrightarrow$$
$$E\left(\frac{1}{\tau-\alpha}+\frac{1}{\tau-\beta}+\frac{1}{\tau-\gamma}-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{\alpha\beta\gamma}{E} \Leftrightarrow$$
$$E\left(\frac{\tau-\alpha+\tau-\beta}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}+\frac{\tau-\tau+\gamma}{(\tau-\gamma)\tau}\right)=\frac{\alpha\beta\gamma}{E} \Leftrightarrow$$
$$E\frac{(2\tau-\alpha-\beta)\tau(\tau-\gamma)+\gamma(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\tau}=\frac{\alpha\beta\gamma}{E} \Leftrightarrow$$
$$E\frac{1}{E^2}[\gamma\tau(\tau-\gamma)+\gamma(\tau-\alpha)(\tau-\beta)]=\frac{\alpha\beta\gamma}{E} \Leftrightarrow$$
$$\gamma(\tau^2-\tau\gamma+\tau^2-\alpha\tau-\beta\tau+\alpha\beta)=\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow$$
$$\gamma[2\tau^2-(\alpha+\beta+\gamma)\tau+\alpha\beta]=\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow$$
$$\gamma(2\tau^2-2\tau\tau+\alpha\beta)=\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow$$

αβγ=αβγ που ισχύει.

3. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

1) **Ε=**$\sqrt{\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma}$

2) $\boldsymbol{\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma \leq \left(\frac{\rho_\alpha+\rho_\beta+\rho_\gamma}{3}\right)^3 = \left(\frac{4R+\rho}{3}\right)^3}$

3) $\mathbf{E} \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$

Απόδειξη

1) Ε=$\sqrt{\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma}$ ⇔ $E^2 = \rho\, \rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma$ <=> $E^2 = \frac{E}{\tau}\frac{E}{\tau-\alpha}\frac{E}{\tau-\beta}\frac{E}{\tau-\gamma}$ ⇔ $E^2 = \frac{E^4}{E^2}$ που ισχύει.

2) Από την ανισότητα Cauchy έχουμε

$\frac{\rho_\alpha+\rho_\beta+\rho_\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma}$ **(**αυτό μπορεί να αποδειχτεί και με την βοήθεια της ανισοταυτότητας Euler $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$ όταν $\alpha+\beta+\gamma \geq 0$)

$\left(\frac{\rho_\alpha+\rho_\beta+\rho_\gamma}{3}\right)^3 \geq \rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma$ οπότε αφού $\rho_\alpha+\rho_\beta+\rho_\gamma = 4R+\rho$ προκύπτει το ζητούμενο.

3) **Ε=**$\sqrt{\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma}$ ⇔ $\frac{E^2}{\rho} = \rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma \leq \left(\frac{4R+\rho}{3}\right)^3$ άρα

$E^2 \leq \left(\frac{4R+\rho}{3}\right)^3 \rho \leq \left(\frac{4R+\frac{R}{2}}{3}\right)^3 \frac{R}{2}$ (αφού $\rho \leq \frac{R}{2}$)

Έτσι $E^2 \leq \frac{27}{16}R^4$ => $E \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ όπου το ίσον ισχύει όταν και μόνο όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Η τελευταία ανίσωση δείχνει ότι από όλα τα τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R, το ισόπλευρο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Και άλλη μια απόδειξη από την σκοπιά της θεωρίας συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

θεώρημα
Έστω $U \subset R^n$,$V \subset R^m$ και η διαφορίσιμη συνάρτηση F : UxV→R. Έστω οι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις Φ_i : UxV→R με Φ_ι (P,Q)=0 με $P=(x_1,x_2,\ldots x_n)$,$Q=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ i=1,2,…m

Αν το (P_0,Q_0) είναι τοπικό ακρότατο της F για το οποίο $\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m)}{D(y_1,y_2,...,y_m)}(P_0,Q_0) \neq 0$ και κάτω από τις συνθήκες $\Phi_\iota(P_0,Q_0)=0$,ι=1,2,…m υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_m \in R$

Έτσι ώστε $\nabla F(P_0,Q_0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla\Phi_i(P_0,Q_0)=0$

Παρατηρήσεις:
Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα τα πιθανά ακρότατα της συνάρτησης F υπο τις συνθήκες $\Phi_i=0$ i=1,2,…m αναζητούνται ανάμεσα στις ρίζες του συστήματος εξισώσεων $\nabla F+\sum\lambda_i\Phi=0$, ενώ η φύση των ακροτάτων καθορίζεται από την μελέτη της Εσσιανής μήτρας $H(F)+\sum H(\Phi_i)$.

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης F(Α,Β,Γ)=ημΑημΒημΓ με 0<Α,Β,Γ<π υπο την συνθήκη Φ=Α+Β+Γ-π=0
<u>Λύση</u>

Τα πιθανά ακρότατα είναι μεταξύ των ριζών της εξίσωσης f=$\nabla F+\lambda\nabla\Phi=0$ με λ∈ℝ
Έτσι προκύπτει το σύστημα
συνΑημΒημΓ+λ=0
ημΑσυνΒημΓ+λ=0
ημΑημΒσυνΓ+λ=0
Από τις δυο πρώτες εξισώσεις προκύπτει ημΓ(ημΑσυνΒ-συνΑημΒ)=0 άρα ημ(Α-Β)=0 δηλαδή Α=Β.

Ομοίως από τις δυο τελευταίες προκύπτει Β=Γ κι έτσι Α=Β=Γ=$\frac{\pi}{3}$

$$\frac{\partial f}{\partial A}=\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma+\lambda,\frac{\partial f}{\partial B}=\eta\mu\mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma+\lambda,\frac{\partial f}{\partial\Gamma}=\eta\mu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu\Gamma+\lambda$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A^2}=-\eta\mu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma,\frac{\partial^2 f}{\partial A\partial B}=\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma,\frac{\partial^2 f}{\partial A\partial\Gamma}=\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial B\partial A}=\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma,\frac{\partial^2 f}{\partial B^2}=-\eta\mu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma,\frac{\partial^2 f}{\partial B\partial\Gamma}=\eta\mu\mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\Gamma\partial\mathrm{A}}=\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu\Gamma,\frac{\partial^2 f}{\partial\Gamma\partial\mathrm{B}}=\eta\mu\mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu\Gamma,\frac{\partial^2 f}{\partial\Gamma^2}=-\eta\mu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}\,\eta\mu\Gamma$$

Έτσι η Εσσιανή μήτρα στη θέση (Α,Β,Γ)=(π/3,π/3,π/3) είναι

$$H=\begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{-3\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{-3\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix}$$

η ακολουθία των ελασσόνων του πίνακα είναι

$D_1=-\frac{3\sqrt{3}}{8}<0$, $D_2=\frac{27}{64}-\frac{3}{64}=\frac{24}{64}>0$ και $D_3=\det H=\frac{-210\sqrt{3}}{8^3}<0$ δηλαδή ο πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε μέγιστο και η μέγιστη τιμή είναι $F(\pi/3,\pi/3,\pi/3)=(\frac{\sqrt{3}}{2})^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ δηλαδή τελικά ημΑημΒημΓ$\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$.