Συναρτήσεις ζ και L

Ορισμοί: • Η συνάρτηση ζ ορίζεται ως

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{με } Re(s) > 1$$

• Οι συναρτήσεις L του Dirichlet:

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad Re(s) > 1$$

Εδώ το $\chi(n)$ είναι ορισμένο ως $\chi(n) = \chi(n \bmod N)$ αν $(n,N)=1$ και $\chi(n)=0$ αν $(n,N)>1$.

• Χαρακτήρας μιας αβελιανής ομάδας G είναι ένας μορφισμός της G στην ομάδα $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, όπου $\mathbb{C}$ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

$\chi : G \to \mathbb{C}^*$ όπου $\chi(\alpha) \neq 0$ για κάποιο $\alpha \in G$.

με $\chi(\alpha\beta) = \chi(\alpha)\cdot\chi(\beta)$ $\forall\, \alpha, \beta \in G$.

Αν η τάξη του $\alpha \in G$ είναι ν, τότε $\alpha^{\nu} = e$ άρα $(f(\alpha))^{\nu} = f(e) = 1$. Δηλαδή η τιμή $f(\alpha)$ είναι κάποια από τις ν-ρίζες της μονάδας.

Μια ομάδα G τάξης n, έχει ακριβώς n χαρακτήρες (όταν είναι αντιμεταθετική)

(Πράγματι αν $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$ είναι η ανάλυση του n σε γινόμενο πρώτων αριθμών, είναι γνωστό ότι η αβελιανή ομάδα τάξης n, αναλύεται σε ευθύ άθροισμα των k υποομάδων της $S_1, S_2, \dots, S_k$ όπου $S_i = \{\alpha \in G : \text{τάξη}\,\alpha = \text{δύναμη του } p_i\}$.

Ισχύει $G = S_1 \otimes S_2 \otimes \dots \otimes S_k$ και $|S_i| = p_i^{n_i}$.

Αν $\alpha \in G$ τότε $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$, $\alpha_i \in S_i$

$\chi(\alpha) = \chi(\alpha_1)\chi(\alpha_2)\dots\chi(\alpha_k)$. Έτσι η τιμή $\chi(\alpha)$ είναι ορισμένη αν είναι ορισμένες οι τιμές της χ για $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Όμως κάθε $\chi(\alpha_i)$ είναι μια $p_i^{n_i}$ ρίζα της μονάδας και έτσι υπάρχουν $p_i^{n_i}$ δυνατότητες επιλογής της τιμής $\chi(\alpha_i)$. Άρα για την $\chi(\alpha)$ θα υπάρχουν $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = n$ δυνατότητες επιλογής.)

• Ορίζουμε $h_1(t) = \frac{1+t}{2(1-t)}$

και $h_\tau(t) = t \cdot h'_{\tau-1}(t)$

έτσι

$$h_2(t) = \frac{t}{(1-t)^2}, \quad h_3(t) = \frac{t+t^2}{(1-t)^3}, \quad h_4(t) = \frac{t+4t^2+t^3}{(1-t)^4}$$

Προφανώς για κάθε ακέραιο $\tau \geq 1$ έχουμε

$$h_\tau(t) \in \mathbb{Q}\left[t, \frac{1}{1-t}\right]$$

Αν $z \in \mathbb{C}, z \notin \mathbb{Z}$ και $t = e^{2\pi i z}$

τότε

α) $$h_1(t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right)$$

β) $$h_k(t) = (k-1)!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^k}, \quad k\geq 2$$

απόδειξη

α) Ξέρουμε ότι

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n\pi}+\frac{1}{z-n\pi}\right) \qquad z \neq \pm n\pi$$

άρα $$\cot \pi z = \frac{1}{\pi z} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right)$$

$$\cot \pi z = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right)$$

$$\cot \pi z = \frac{\cos\pi z}{\sin\pi z} = i\,\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}} = i\,\frac{e^{2i\pi z}+1}{e^{2i\pi z}-1}$$

Αν $t = e^{2i\pi z}$ τότε $\cot\pi z = i\,\frac{t+1}{t-1} = -2i h_1(t)$

άρα $$h_1(t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right)$$

β) Παραγωγίζοντας την (α) ως προς z έχουμε

$$\frac{d}{dz}h_1(t) = \frac{d}{dz}\left(h_1(e^{2i\pi z})\right) = h_1'(e^{2\pi i z})\,e^{2i\pi z}\cdot 2\pi i =$$
$$h_1'(t)\cdot t\cdot 2\pi i = 2\pi i\cdot h_2(t)$$

η παράγωγος του δεύτερου μέλους είναι:

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{1}{(z+n)^2}-\frac{1}{(z-n)^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{(z+n)^2}+\frac{1}{(z-n)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^2}$$

έτσι $h_2(t) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \sum_{n\in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}$

Η γενική σχέση τώρα μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή.
για $\tau=2$ ισχύει όπως δείξαμε.

έστω $h_\tau(t) = (\tau-1)!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^\tau \sum_{n\in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^\tau}$

1ο μέλος:

$$\frac{d}{dz} h_\tau(t) = h'_\tau(t)\cdot t\, 2\pi i = h_{\tau+1}(t)\cdot 2\pi i$$

2ο μέλος: $(\tau-1)!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^\tau \sum_{n\in \mathbb{Z}} -\frac{\tau}{(z+n)^{\tau+1}}$

$$= -\tau!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^\tau \sum_{n\in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^{\tau+1}}$$

άρα $h_{\tau+1}(t) = \tau!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^{\tau+1} \sum_{n\in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^{\tau+1}}$.

Έστω N φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1, X, χαρακτήρας Dirichlet modulo N, και τ φυσικός αριθμός. Υποθέτουμε ότι $X(-1)=(-1)^{\tau}$

Αν $\zeta_N = e^{2\pi i/N}$ τότε

$$L(\tau, X) = \frac{1}{(\tau-1)!}\left(-\frac{2\pi i}{N}\right)^{\tau} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{*}} X(\alpha)\, h_{\tau}(\zeta_N^{\alpha})$$

απόδειξη.

Είναι γνωστό ότι $h_\tau(t) = (\tau-1)!\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^{\tau} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^{\tau}}$, $t = e^{2\pi i z}$, $z \in \mathbb{Z}$

έτσι $h_\tau(\zeta_N^{\alpha}) = (\tau-1)!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^{\tau} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{N}+n\right)^{\tau}} = (\tau-1)!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^{\tau} \cdot N^{\tau} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha+nN)^{\tau}}$

$$\sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{*}} X(\alpha)\, h_\tau(\zeta_N^{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N-1} X(\alpha)(\tau-1)!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^{\tau} N^{\tau} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{X(\alpha)}{(\alpha+nN)^{\tau}}$$

$$= (\tau-1)!\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^{\tau} N^{\tau} \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{X(\alpha)}{(\alpha+nN)^{\tau}}$$

$$= (\tau-1)!\left(-\frac{N}{2\pi i}\right)^{\tau} \sum_{\alpha=1}^{N-1}\left[\sum_{n\geq 0} \frac{X(\alpha)}{(\alpha+nN)^{\tau}} + \sum_{n<0} \frac{X(\alpha)}{(\alpha+nN)^{\tau}}\right] \quad (1)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{n\geq 0} \frac{X(\alpha)}{(\alpha+nN)^{\tau}} = \sum_{n\geq 0} \sum_{\alpha=1}^{N-1} \frac{X(\alpha)}{(\alpha+nN)^{\tau}} = \sum_{n\geq 0} \sum_{\alpha=1}^{N-1} \frac{X(\alpha+nN)}{(\alpha+nN)^{\tau}}$$

Αν $m = \alpha + nN$ τότε όταν $1 \leq \alpha \leq N-1 \iff Nn+1 \leq m \leq N(n+1)-1$

έτσι το παραπάνω άθροισμα γίνεται

$$\sum_{n\geq 0} \sum_{Nn<m<N(n+1)} \frac{X(m)}{m^{\tau}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X(m)}{m^{\tau}} = L(\tau, X)$$

επίσης $\sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{n<0} \frac{X(\alpha)}{(\alpha+nN)^{\tau}} = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{n<0} \frac{X(\alpha)}{(-N+\alpha+N(1+n))^{\tau}} =$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N-1} (-1)^{\tau} \sum_{n<0} \frac{X(\alpha)}{(N-\alpha+N(-1-n))^{\tau}} = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{n'\geq 0} \frac{(-1)^{\tau} X(\alpha)}{(N-\alpha+Nn')^{\tau}} =$$

$$\sum_{n'\geq 0} \sum_{\alpha=1}^{N-1} \frac{X(-\alpha)}{(N-\alpha+Nn')^{\tau}} = \sum_{n'\geq 0} \sum_{\alpha=1}^{N-1} \frac{X(N-\alpha+Nn')}{(N-\alpha+Nn')^{\tau}}$$

Αν θέσουμε $m = N-\alpha+Nn'$

τότε καθώς $1 \le \alpha \le N-1$

προκύπτει $Nn'+1 \le m \le N(n'+1)-1$

έτσι το άθροισμα γίνεται:

$$\sum_{n' \geq 0} \sum_{n'N < m < (n'+1)N} \frac{X(m)}{m^{\tau}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X(m)}{m^{\tau}} = L(\tau, X)$$

Η (1) λοιπόν γίνεται:

$$\sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}N)^*} X(\alpha) h_{\tau}(\zeta_N^{\alpha}) = (\tau-1)! \left(-\frac{N}{2\pi i}\right)^{\tau} \cdot 2 L(\tau, X)$$

έτσι θα έχουμε $L(\tau, X) = \frac{1}{(\tau-1)!}\left(-\frac{2\pi i}{N}\right)^{\tau} \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}N)^*} X(\alpha) h_{\tau}(\zeta_N^{\alpha})$

<u>Παρατήρηση</u>: Δεδομένου ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X(n)}{n}$ συγκλίνει για κάθε μη κύριο χαρακτήρα X. (δηλ. $X(\alpha) \neq 1$ για κάποιο α) το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση $\tau = 1$.

Πράγματι στην περίπτωση αυτή

$$\sum X(\alpha) h_1(\zeta_N^{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N-1} X(\alpha)\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\frac{\alpha}{N}+n} + \frac{1}{\frac{\alpha}{N}-n}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot N \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{n} \left(\frac{X(\alpha)}{\alpha+nN} + \frac{X(\alpha)}{\alpha-nN}\right) = -\frac{N}{4\pi i}\left[\sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{n} \frac{X(\alpha)}{\alpha+nN} + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{n} \frac{X(\alpha)}{\alpha-nN}\right]$$

$$= -\frac{N}{4\pi i}\left[2L(1, X) + 2L(1, X)\right] = -\frac{N}{\pi i} L(1, X)$$

έτσι $L(1, X) = -\frac{\pi i}{N} \sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}N)^*} X(\alpha) h_1(\zeta_N^{\alpha})$

Έστω r θετικός άρτιος αριθμός. Τότε έχουμε

$$\zeta(r) = \frac{1}{(r-1)!}\,\frac{1}{2^r-1}\,(2\pi i)^r \cdot \frac{1}{2}\, h_r(-1)$$

<u>απόδειξη</u>

Ξέρουμε ότι $L(r,\chi) = \frac{1}{(r-1)!}\left(-\frac{2\pi i}{N}\right)^r \frac{1}{2} \sum \chi(a)\, h_r(\zeta_N^a)$

Έστω $N=2$. Τότε $\zeta_N = e^{\frac{2\pi i}{2}} = -1$

ενώ για τον χαρακτήρα Dirichlet χ, ισχύει

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 1 & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

έτσι

$$L(r,\chi) = \frac{1}{(r-1)!}\,\frac{(2\pi i)^r}{(2)^r}\,\frac{1}{2}\, h_r(-1) = \frac{1}{(r-1)!}(\pi i)^r \frac{1}{2} h_r(-1)$$

Όμως $L(r,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^r} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \zeta(r) - \sum_{n \text{ άρτιος}} \frac{1}{n^r}$

$$= \zeta(r) - \frac{1}{2^r}\zeta(r) = \left(\frac{2^r-1}{2^r}\right)\zeta(r)$$

δηλαδή $\zeta(r) = \frac{2^r}{2^r-1} L(r,\chi) = \frac{2^r}{2^r-1}\,\frac{1}{(r-1)!}(\pi i)^r \frac{1}{2} h_r(-1)$

άρα $\zeta(r) = \frac{1}{(r-1)!}\,\frac{1}{2^r-1}\,(2\pi i)^r\,\frac{1}{2}\, h_r(-1)$.

<u>παράδειγμα:</u>

$r=2$ $\quad \zeta(2) = \frac{1}{(2-1)!}\,\frac{1}{2^2-1}\,(2\pi i)^2\,\frac{1}{2}\,\frac{-1}{(1+1)^2} = \frac{1}{3}\,4\pi^2(-1)\,\frac{1}{2}\,\frac{-1}{4} = \frac{\pi^2}{6}$

$r=4$ $\quad \zeta(4) = \frac{1}{(4-1)!}\,\frac{1}{2^4-1}\,(2\pi i)^4\,\frac{1}{2}\,\frac{-1+4-1}{2^4} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{15}\cdot 16\pi^4\cdot\frac{1}{2}\,\frac{2}{16} = \frac{\pi^4}{90}$

<u>παρατήρηση:</u> Αν r άρτιος φυσικός, τότε
$\zeta(r)\,\pi^{-r}$ είναι πάντα ρητός αριθμός.

Παραδείγματα L σειρών

1. $L(1,\chi)$ όπου χ χαρακτήρας mod 4

η ομάδα $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$ περιέχει τα στοιχεία 1 mod 4, 3 mod 4

ορίζουμε $\chi(1 \bmod 4) = 1$, $\chi(3 \bmod 4) = -1$

$$\zeta_4 = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$L(1,\chi) = \frac{1}{(1-1)!}\left(-\frac{2\pi i}{4}\right)\frac{1}{2}\left(h_1(i) - h_1(i^3)\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\pi i\left(\frac{1+i}{2(1-i)} - \frac{1+i^3}{2(1-i^3)}\right) = -\frac{\pi i}{8}\left(\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{8}\left(\frac{1+i^2+2i-1-i^2+2i}{2}\right) = -\frac{\pi i}{8}2i = \frac{\pi}{4}$$

έτσι βρίσκουμε $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4}$ (Leibniz)

2. Η σειρά $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots$

$N = 3$ $\quad \chi(1 \bmod 3) = 1$, $\chi(2 \bmod 3) = -1$

$$\zeta_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$L(1,\chi) = \frac{1}{(1-1)!}\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)\frac{1}{2}\left(h_1(\zeta_3) - h_1(\zeta_3^2)\right)$$

$$= \frac{-2\pi i}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}i} - \frac{1-\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right) =$$

$$= -\frac{2\pi i}{3}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{8\sqrt{3}i}{12} = -\frac{\pi i}{3}\,\frac{\sqrt{3}i}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \quad \text{(Euler)}$$

3. Η σειρά $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots$

Εδώ έχουμε $r = 3$ $\quad N = 4$ $\quad \chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 1 & \text{αν } n \text{ περιττός} \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{αν } n \text{ περιττός} \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$

$\zeta_4 = i$.

$$L(3,\chi) = \frac{1}{(3-1)!}\left(-\frac{2\pi i}{4}\right)^3\frac{1}{2}\left[h_3(i) - h_3(i^3)\right] = \frac{\pi^3}{32} \quad \text{(Euler)}$$