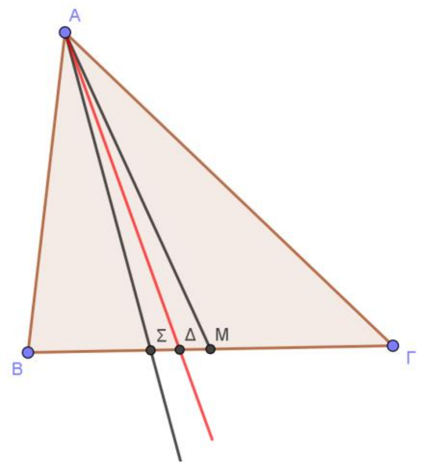
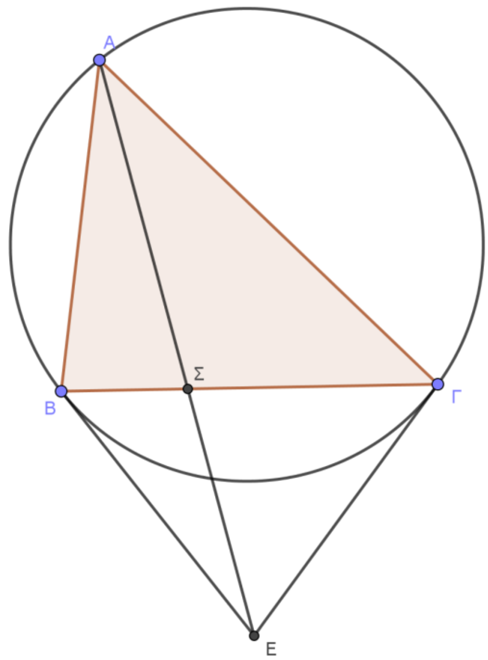
ΣΥΜΜΕΤΡΟΔΙΑΜΕΣΟΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΚΥΚΛΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ως γνωστό σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η συμμετροδιάμεσος ΑΣ που αντιστοιχεί στην κορυφή Α του τριγώνου, είναι το συμμετρικό της διαμέσου ΑΜ ως προς τη διχοτόμο ΑΔ του τριγώνου.



Ο παραπάνω ορισμός μας δίνει και έναν άμεσο τρόπο κατασκευής της συμμετροδιαμέσου. Από τον ορισμό επίσης προκύπτει το γεγονός ότι η ΑΜ και η ΑΣ είναι ισογώνιες ως προς τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ του τριγώνου, δηλαδή $\widehat{\Gamma A M}=\widehat{B A \Sigma}$. Αυτή η παρατήρηση μας δίνει άλλον ένα τρόπο κατασκευής της συμμετροδιαμέσου ΑΜ.

Στο παρόν άρθρο θα δούμε έναν ακόμη τρόπο κατασκευής της συμμετροδιαμέσου, με τη βοήθεια του περιγεγραμμένου κύκλου (περίκυκλος) του τριγώνου. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι αν φέρουμε τις εφαπτομένες του περιγεγραμμένου κύκλου στα σημεία Β και Γ και ονομάσουμε Ε το σημείο τομής τους, τότε το σημείο τομής Σ της ΑΕ με τη ΒΓ ορίζει τη συμμετροδιάμεσο ΑΣ από την κορυφή Α.

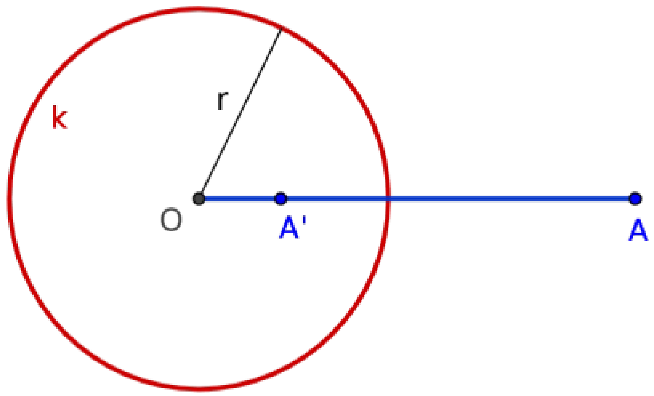


Την απόδειξη θα την κάνουμε με βάση τη θεωρία αντιστροφής (συμμετρία σε κύκλο). Υπενθυμίζουμε λοιπόν πριν ξεκινήσουμε, κάποια από τα βασικά της θεωρίας αντιστροφής.

Έστω κ ένας κύκλος του επιπέδου, με ακτίνα r και κέντρο το σημείο Ο. Ας είναι επίσης Α ένα σημείο που δεν ταυτίζεται με το κέντρο Ο. Λαμβάνουμε το σημείο Α΄ πάνω στην ακτίνα ΟΑ με τέτοιο τρόπο ώστε το γινόμενο του ΟΑ με το ΟΑ΄ να ισούται με το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου κ:

$$OA \cdot OA' = r^2 \quad (1)$$

Συμφωνούμε να λέμε ότι τα σημεία Α και Α΄ είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο κ.

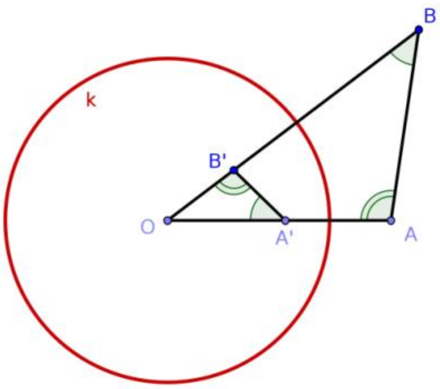


Αν κάποιο από τα σημεία Α και Α΄ είναι έξω από τον κύκλο τότε το άλλο κείται στο εσωτερικό του κύκλου, και αντίστροφα. Για παράδειγμα, από την ανισότητα ΟΑ>r , προκύπτει με βάση την εξίσωση (1) ότι ΟΑ΄< r. Αν κάποιο από τα Α ή Α΄ ανήκει πάνω στον κύκλο κ, τότε τα Α και Α συμπίπτουν.

Τώρα ας θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό του επιπέδου που στο σημείο Α αντιστοιχεί το συμμετρικό του Α' ως προς τον κύκλο κ. Αυτός ο μετασχηματισμός καλείται αντιστροφή, ο κύκλος κ καλείται κύκλος της αντιστροφής, και το κέντρο του πόλος της αντιστροφής. Αν η αντιστροφή που αντιστοιχεί στον κ, μεταφέρει ένα σχήμα Σ στο Σ΄, τότε λέμε ότι το Σ είναι συμμετρικό με το Σ΄ και το Σ΄ με το Σ, ως προς τον κύκλο κ.

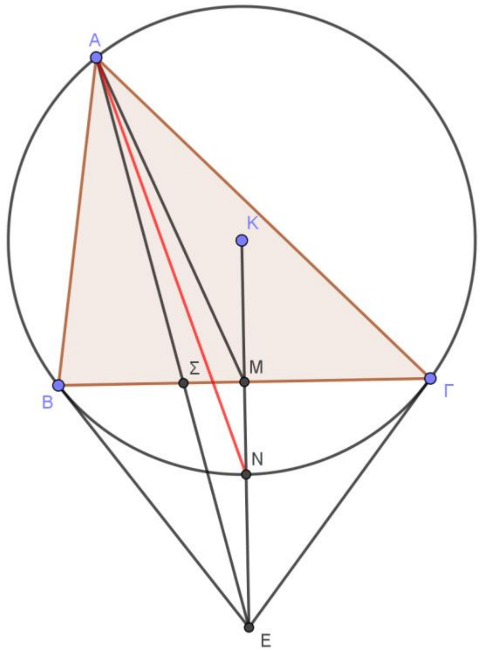
Στο πλαίσιο της απόδειξης θα χρειαστούμε και το εξής: Αν Α΄και Β΄ είναι τα συμμετρικά των Α, Β αντίστοιχα ως προς τον κύκλο κ, τότε ισχύουν οι παρακάτω τύποι:

$$A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot AB \quad \text{και} \quad AB = \frac{r^2}{OA' \cdot OB'} \cdot A'B' \quad (*)$$



Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη μας.

Θεωρούμε την αντιστροφή ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΒΓ. Τα σημεία Α,Β,Γ μένουν αναλλοίωτα ως προς αυτή την αντιστροφή αφού ανήκουν πάνω στον κύκλο αντιστροφής. Το σημείο Ε απεικονίζεται στο μέσο Μ του τμήματος ΒΓ. Πράγματι, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΒΕ και αφού η ΒΚ είναι κάθετη στην ΚΕ προκύπτει ή σχέση $ΒΚ^2=ΚΕ\cdot ΚΜ$ η οποία δείχνει ακριβώς ότι το αντίστροφο του Ε είναι το Μ. Αν θεωρήσουμε το μέσο Ν του τόξου ΒΓ τότε η ΑΝ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Αν δείξουμε ότι η ΑΝ είναι η διχοτόμος του ΑΕΜ τριγώνου αυτό θα δείχνει ότι η ΑΣ είναι η συμμετροδιάμεσος του ΑΒΓ. Στο σημείο αυτό θα επικαλεστούμε τους τύπους (*) που αναφέρθηκαν παραπάνω. Θα έχουμε λοιπόν:



$ΑΕ=\frac{r^2}{ΚΑ\cdot ΚΜ}\cdot ΑΜ$. Άρα $\frac{ΑΕ}{ΑΜ}=\frac{r^2}{ΚΑ\cdot ΚΜ}=\frac{ΚΝ}{ΚΜ}$ (1) (r=ΚΑ=ΚΝ)

Επίσης αφού το Ν απεικονίζεται στον εαυτό του θα ισχύει $ΕΝ=\frac{r^2}{ΚΜ\cdot ΚΝ}\cdot ΜΝ$ συνεπώς $\frac{ΕΝ}{ΝΜ}=\frac{r^2}{ΚΜ\cdot ΚΝ}=\frac{ΚΝ}{ΚΜ}$. (2). Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $\frac{ΑΕ}{ΑΜ}=\frac{ΕΝ}{ΝΜ}$ σχέση που δείχνει ότι ΑΝ είναι η διχοτόμος του τριγώνου ΑΕΜ. ■