

Η μέθοδος του Ταμπλό

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε μια κομψή και αποτελεσματική μέθοδο, για τον έλεγχο της λογικής εγκυρότητας (ενός τύπου) μιας πρότασης του προτασιακού λογισμού.

Η μέθοδος, όπως θα δούμε παρακάτω, μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση του κλαστικού λογισμού.

Ο τρόπος εφαρμογής της αυτής μεθόδου αυτή, περιγράφεται με τους παρακάτω δύο πίνακες (ταμπλό) και τους αντίστοιχούς τους κανόνες:

Τύποι αλγεβρικής μορφής

α	α_1	α_2	Κανόνες A - α
$x \vee y$	x	y	α_1
$\neg(x \vee y)$	$\neg x$	$\neg y$	α_2
$\neg(x \rightarrow y)$	x	$\neg y$	
$\neg \neg x$	x	x	

Τύποι διαζευκτικής μορφής

b	b_1	b_2	Κανόνες B - b
$\neg(x \wedge y)$	$\neg x$	$\neg y$	$b_1 \mid b_2$
$x \vee y$	x	y	
$x \rightarrow y$	$\neg x$	y	

Σχόλια:

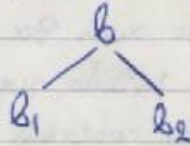
1) Το πρώτο ταμπλό, δίνει ότι ένας τύπος, της μορφής α (αλγεβρικής μορφής) είναι αληθής, αν και μόνο αν οι συνιστώσες του α_1, α_2 είναι αληθέστερες αληθείς.

Δηλ. α αληθής ανν α_1 και α_2 αληθείς. Κάθε την εφαρμογή της μεθόδου, δίνεται να αντὶ το "και", διασφαλίζοντας τις συνιστώσες α_1, α_2 του α , καθεμιά από αυτές από το α .

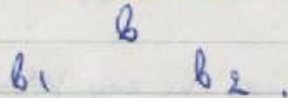
2) Το δεύτερο ταμπλό, δίνει ότι ένας τύπος, της μορφής b (διαζευκτικής μορφής) είναι αληθής, αν και μόνο αν, μια συνιστώσα από τις συνιστώσες του b_1, b_2 είναι αληθής.

Δηλ. b αληθής ανν b_1 ή b_2 αληθής.

Κάθε την εφαρμογή της μεθόδου, διακρίνουμε αμέσως το "ή" διακρίνοντας μια διακλάδωση κάθε από το α στο β :



ή απλούστερα φράζοντας ορίζουμε κάθε από το β τις συνιστώσες στο β_1, β_2 .



Η ιδέα αυτή της μεθόδου είναι η εξής:

Έστω ότι θέλω να ελέγξω την λογική εγκυρότητα της πρότασης Q .

Ξεκινώντας με την άρνηση $\neg Q$ της πρότασης, εφαρμόζω βεβαιωτικά τους κανόνες A και B .

Αν κατά την διαδικασία αυτή εμφανιστεί σε έναν κλάδο (μονοπάτι) η πρόταση P και η $\neg P$ τότε λέμε ότι το "μονοπάτι" αυτό είναι κλειστό δηλ οδηγεί σε αντίφαση.

Αν όλα τα μονοπάτια που θα προκύψαν είναι κλειστά είναι σαν να λέμε ότι η υπόθεση $\neg Q$ οδηγεί σε άτοπο, πράγμα που σημαίνει ότι η Q πρέπει να είναι λογικά έγκυρη. (As βεβαιωθεί ότι αυτό που περιγράψαμε στα δύο σημεία με τις κυρίως κανόνες της, παραμένει ορθό κάθε από οποιαδήποτε ερμηνεία των προτάσεων είναι α ή β .)

Αν εμφανιστεί κάποιο μονοπάτι που δεν κλείνει (ανοικτό μονοπάτι), αυτό θα σημαίνει ότι η πρόταση Q δεν είναι λογικά έγκυρη (ταυτολογία). Στην περίπτωση αυτή μέλλεται η μέθοδος μπορεί να μας προημερίσει και με μια ερμηνεία (απόδοση δηλαδή αληθοκεινών σε άτομα της Q) κάτω από την οποία η $\neg Q$ είναι αληθής (και επομένως η Q ψευδής).

Το γεγονός ότι ένα μονοπάτι κλείνει χαρακτηρίζεται με ένα $\times$ στο τέλος του.

παράδειγμα 1. Θα δείξουμε ότι ο τύπος $[P \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(P \vee q) \wedge (P \vee r)]$
είναι λογικά έγκυρος
απόδειξη

(1)	$\sim ([P \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(P \vee q) \wedge (P \vee r)])$		
(2)	$P \vee (q \wedge r)$		
(3)	$\sim [(P \vee q) \wedge (P \vee r)]$		
(4)	$\sim (P \vee q)$	(5)	$\sim (P \vee r)$
(6)	$\sim P$	(12)	$\sim P$
(7)	$\sim q$		$\sim r$
(8)	P	(13)	P
	X		X
		(14)	$q \wedge r$
		(15)	q
		(16)	r
			X

παράδειγμα 2. Να αποδειχθεί ο τύπος $[P \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(P \rightarrow q) \rightarrow (P \rightarrow r)]$
απόδειξη

(1)	$\sim ([P \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(P \rightarrow q) \rightarrow (P \rightarrow r)])$		
(2) _i	$P \rightarrow (q \rightarrow r)$		
(3) _i	$\sim [(P \rightarrow q) \rightarrow (P \rightarrow r)]$		
(4) ₃	$P \rightarrow q$		
(5) ₃	$\sim (P \rightarrow r)$		
(6) ₅	P		
(7) ₅	$\sim r$		
(8) ₂	$\sim P$	(9) ₂	$q \rightarrow r$
	X	(10) ₉	$\sim q$
		(11) ₉	r
		(12) ₄	$\sim P$
		(13) ₄	q
			X

* Ο κύριος δείκτης που φαίνεται στον αριθμό της των προτάσεων
δείχνει από ποιά πρόταση έχει προκύψει με εφαρμογή των
κανόνων A και B

π.χ. ο εμπλεκόμενος (4)₃ δείχνει ότι η (4) έχει προκύψει
από την (3) με εφαρμογή των κατάλληλων κανόνων.

παράδειγμα 3 Να ελέγξετε αν η πρόταση $(p \vee q) \rightarrow p \wedge q$
είναι λογικά έσχυρη
Λύση

- (1) $\sim [(p \vee q) \rightarrow p \wedge q]$
- (2) $p \vee q$
- (3) $\sim (p \wedge q)$
- (4)₂ p (5)₂ q
- (6)₃ $\sim p$ (7)₃ $\sim q$ (8)₃ $\sim p$ (9)₃ $\sim q$
- x x

Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο
κρίσιμα μονοπάτια. Άρα η πρόταση δεν είναι
ταυτολογία. Μάλιστα αν π.χ η p είναι αληθής
και η q είναι ψευδής τότε $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ είναι ψευδής.
Επίσης ψευδής είναι και στην περίπτωση που η q είναι αληθής
και p ψευδής.

ασκησης Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτολογίες

- (1) $q \rightarrow (p \rightarrow q)$
- (2) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
- (3) $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow p \rightarrow (q \wedge r)$
- (4) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \vee q)] \rightarrow r$
- (5) $\sim (p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
- (6) $\sim (p \vee q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
- (7) $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim (p \wedge q)$
- (8) $[p \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$