<u>Μάιος 2012</u>

Να λυθεί η Διοφαντική εξίσωση $\chi^2 = 1+8\psi$ όπου χ,ψ φυσικοί αριθμοί.

<u>Λύση</u>

Παρατηρούμε ότι: $1+8\cdot 0=1^2$
$1+8\cdot 1=3^2$
$1+8\cdot 3=5^2$
$1+8\cdot 6=7^2$
$1+8\cdot 10=9^2$

Για την ακολουθία λ_ν με $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=3$, $\lambda_4=6$,... έχουμε:
$\lambda_2-\lambda_1=1$
$\lambda_3-\lambda_2=2$
$\lambda_4-\lambda_3=3$
.
.
.
$\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}=\nu-1$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $\lambda_\nu-\lambda_1=1+2+3+...+(\nu-1)$ άρα $\lambda_\nu= \dfrac{\nu(\nu-1)}{2}$

Οι αριθμοί $(\chi,\psi)= (2\nu-1,\dfrac{\nu(\nu-1)}{2})$ με $\nu\in N^0$ είναι λύσεις της εξίσωσης αφού

$$8\frac{\nu(\nu-1)}{2}+1=4\nu(\nu-1)+1=4\nu^2-4\nu+1=(2\nu-1)^2$$

Θέτουμε $\psi_\nu=\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}\, και\, \chi_\nu=2\nu-1$

Θα δείξουμε οτι οι μόνες λύσεις της δοσμένης εξίσωσης είναι τα ζεύγη

$$(\chi_\nu,\psi_\nu)=(2\nu-1\,,\frac{\nu(\nu-1)}{2})$$

Πράγματι ας είναι (κ,λ) λύση για την οποία ισχύει $\psi_{\nu-1}<\lambda<\psi_\nu$ για κάποιο φυσικό ν>1.

Τότε: $1+8\psi_{\nu-1}<1+8\lambda<1+8\psi_\nu \Leftrightarrow \chi_{\nu-1}^2<\kappa^2<\chi_\nu^2$
$\Leftrightarrow(2\nu-3)^2<\kappa^2<(2\nu-1)^2\Leftrightarrow 2\nu-3<k<2\nu-1$ και αφού ο κ είναι φυσικός θα έχουμε κ=2ν-2. Τότε απο την σχέση $\kappa^2=1+8\lambda$ έχουμε $4(\nu-1)^2=1+8\lambda$ δηλαδή 4/1 άτοπο.

Συνεπώς δεν υπάρχουν άλλες λύσεις εκτός απο τα ζεύγη

$$(2\nu-1,\frac{\nu(\nu-1)}{2})\, όπου\, \nu\, φυσικός\, αριθμός\, με\, \nu>0.$$