Αν f, g :[α, β]→R συνεχείς και γνησίως. αύξουσες να δειχθεί ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \prec (\beta-\alpha)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g(x)d(x).$$

<u>Απόδειξη 1η</u>

Θεωρούμε την συνάρτηση F(x)= (x-α) $\int_a^x f(t)g(t)dt - \int_a^x f(t)dt\int_a^x g(t)dt$ με $\chi \in [\alpha,\beta]$

Αφού οι f,g είναι συνεχείς η F θα είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,β] . Παραγωγίζοντας έχουμε:

F΄(χ)= $\int_\alpha^\chi f(t)g(t)dt + (x-\alpha)f(x)g(x) - f(x)\int_a^x g(t)dt - g(x)\int_a^x f(t)dt$ =>

F΄(x)= $\int_\alpha^\chi f(t)g(t)dt + \int_a^x f(x)g(x)dt - \int_a^x f(x)g(t)dt - \int_a^x g(x)f(t)dt$ =>

F΄(x) = $\int_a^x [f(t)-f(x)][g(t)-g(x)]dt$ Είναι όμως α ≤ t ≤ x και αφού η συναρτήσεις μας είναι γνησίως αύξουσες θα έχουμε f(t)-f(x)≤0 και g(t)-g(x) ≤0 άρα F΄(x) ≥ 0. (Στην πραγματικότητα είναι F΄(χ)>0 όταν χ>α ,διότι αν για κάποιο χ >α είχαμε F΄(x)=0 ,δεδομένου ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι μη αρνητική , θα έπρεπε [f(t)-f(x)][g(t)-g(x)]=0 $\forall$ α≤t≤x πράγμα άτοπο αφού οι f,g είναι γνησίως αύξουσες).

Ώστε τελικά είναι F΄(x)>0 για κάθε χ>α δηλαδή η F είναι γνησίως αύξουσα κι έτσι θα έχουμε

F(x) > F(α)=0 . Άρα F(β)>0 που είναι η ζητούμενη ανισότητα.

Παρατηρήσεις

1) Το συμπέρασμα ισχύει ακόμα κι αν οι συναρτήσεις είναι και οι δυο γνησίως φθίνουσες.
2) Διαιρώντας με $(\beta-\alpha)^2$ και τα δυο μέλη της ανίσωσης προκύπτει ότι : $\overline{f}\cdot\overline{g} \prec \overline{f\cdot g}$ δηλαδή η μέση τιμή του γινομένου δυο γνησίως αυξουσών συναρτήσεων , είναι μεγαλύτερη από το γινόμενο των μέσων τιμών τους.

<u>Απόδειξη 2η</u> (βασισμένη στον λογισμό διπλών ολοκληρωμάτων)

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy =$$
$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dxdy - \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(y)dxdy - \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(y)g(x)dxdy + \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(y)g(y)dxdy =$$
$$2[\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dxdy - \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(y)dxdy] = 2[(\beta-\alpha)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\int_{\alpha}^{\beta} g(y)dy] =$$
$$2[(\beta-\alpha)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx]$$

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι αύξουσες (ή φθίνουσες) και οι δυο, τότε προφανώς το αρχικό ολοκλήρωμα είναι μη αρνητικό (και μάλιστα αυστηρά θετικό αν οι f,g είναι γνησίως μονότονες) οπότε από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \prec (\beta-\alpha)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g(x)d(x)$ **ο.ε.δ.**

<u>Απόδειξη 3η</u> (Βασισμένη στην ανισότητα Tchebychev και τον ορισμό του ολοκληρώματος)

Λήμμα

Αν α_ν , β_ν είναι αύξουσες ακολουθίες πραγματικών αριθμών , τότε

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i b_i}{n} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}$$ **ή ισοδύναμα** $n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$

Για ευκολία στην γραφή θα την αποδείξουμε όταν n=3 (η γενική περίπτωση αποδεικνύεται παρόμοια)

Είναι λοιπόν $\alpha_1-\alpha_2\leq 0$, $\alpha_2-\alpha_3\leq 0$, $\alpha_1-\alpha_3\leq 0$

$\beta_1-\beta 2\leq 0$, $\beta_2-\beta_3\leq 0$, $\beta_1-\beta_3\leq 0$ οπότε

$(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)+(\alpha_2-\alpha_3)(\beta_2-\beta_3)+(\alpha_1-\alpha_3)(\beta_1-\beta_3)\geq 0 \Leftrightarrow$

$2(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)\geq \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1 \Leftrightarrow$ (προσθέτοντας και στα δυο μέλη $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$)

$3(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)\geq(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\beta_1+\beta_2+\beta_3)$ που είναι η ζητούμενη ανίσωση.

Αν $\alpha=\chi_0<\chi_1<\chi_2<\ldots<\chi_\nu=\beta$ είναι μια διαμέριση του διαστήματος [α,β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα με μήκος $\Delta\chi=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ και $\xi_\kappa \in[\chi_{\kappa-1},\chi_\kappa]$ τυχαίος αριθμός του διαστήματος $[\chi_{\kappa-1},\chi_\kappa]$

τότε θα είναι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta\chi = \lim_{\nu\to\infty}(\beta-\alpha) \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)}{\nu}$ Ομοίως θα έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = (\beta-\alpha)\lim_{\nu\to\infty}\frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} g(\xi_\kappa)}{\nu} \quad \text{και} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = (\beta-\alpha)\lim_{\nu\to\infty}\frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)g(\xi_\kappa)}{\nu}$$

Τώρα λόγω της ανισότητας Tchebychev και αφού οι ακολουθίες $f(\xi_\kappa),g(\xi_\kappa)$ είναι αύξουσες θα έχουμε

$$\frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)g(\xi_\kappa)}{\nu} \geq \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)}{\nu}\frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} g(\xi_\kappa)}{\nu} \Leftrightarrow$$

$(\beta-\alpha)\frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)g(\xi_\kappa)}{\nu} \geq \frac{1}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)\frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)}{\nu}(\beta-\alpha)\frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} g(\xi_\kappa)}{\nu}$ και περνώντας στο όριο προκύπτει η ζητούμενη ανίσωση.