

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

Η εξίσωση $\frac{(\chi+\psi-1)(\chi+\psi-2)}{2} + \chi = \nu$ για κάθε μη μηδενικό φυσικό αριθμό ν , έχει μοναδική λύση (χ, ψ) με χ, ψ μη μηδενικούς φυσικούς αριθμούς.

Λύση

$$\frac{(\chi+\psi-1)(\chi+\psi-2)}{2} + \chi = \nu \Leftrightarrow (\chi+\psi)^2 - 3(\chi+\psi) + 2 + 2\chi = 2\nu$$

$$\Leftrightarrow \chi^2 + 2\chi\psi + \psi^2 - 3\chi - 3\psi + 2 + 2\chi - 2\nu = 0$$

$$\Leftrightarrow \chi^2 + (2\psi - 1)\chi + \psi^2 - 3\psi + 2 - 2\nu = 0 \quad (1)$$

Η διακρίνουσα της (1) (θεωρούμενης ως τριώνυμο του χ) είναι

$$\Delta = (2\psi - 1)^2 - 4(\psi^2 - 3\psi + 2 - 2\nu) = 8(\psi + \nu - 1) + 1$$

Για να έχει η (1) ακέραιες λύσεις πρέπει η διακρίνουσα να είναι τέλειο τετράγωνο, οπότε

$$\text{σύμφωνα και με την άσκηση του μήνα Μαΐου πρέπει } \psi + \nu - 1 = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} \text{ με } \alpha \in \mathbb{N}^0$$

$$\text{Θα έχουμε λοιπόν } \Delta = 8 \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} + 1 = (2\alpha + 1)^2. \text{ Άρα } \chi = \frac{1 - 2\psi + 2\alpha + 1}{2} \text{ κι έτσι}$$

$\chi = \alpha - \psi + 1$ (2). Θα δείξουμε τώρα ότι το σύστημα

$$\psi + \nu - 1 = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2}$$

$$\chi + \psi = \alpha + 1$$

$$\chi > 0, \psi > 0, \alpha > 0$$

έχει μοναδική λύση για κάθε μη μηδενικό φυσικό αριθμό ν .

$$\text{Αφού } \psi = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} - \nu + 1 \text{ και } \psi > 0 \text{ θα έχουμε } \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} - \nu \geq 0 \text{ ή}$$

$$\alpha^2 + \alpha - 2\nu \geq 0 \text{ άρα } \alpha \geq \frac{-1 + \sqrt{8\nu + 1}}{2} \quad (3)$$

$$\text{Επίσης } \chi = \alpha + 1 - \psi \quad \chi = \alpha + 1 - \psi \Leftrightarrow \chi = \alpha + 1 - \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} + \nu - 1$$

$$\text{Αφού } \chi > 0 \text{ θα έχουμε απ' την παραπάνω } 2\alpha + 2 - \alpha^2 - \alpha + 2\nu - 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 2\nu < 0$$

$$\text{Έτσι προκύπτει } \alpha < \frac{1 + \sqrt{8\nu + 1}}{2} \quad (4)$$

$$\text{Από τις (3),(4) συμπεραίνουμε ότι το } \alpha \text{ ανήκει στο διάστημα } \left[\frac{-1 + \sqrt{8\nu + 1}}{2}, \frac{1 + \sqrt{8\nu + 1}}{2} \right)$$

Το μήκος του παραπάνω διαστήματος είναι 1, άρα θα υπάρχει ακριβώς μια τιμή του ακεραίου α εντός του διαστήματος αυτού. Επιλέγοντας λοιπόν αυτήν την μοναδική τιμή του α υπολογίζουμε μονοσήμαντα τα χ, ψ απ' την πρώτη και δεύτερη εξίσωση του παραπάνω συστήματος.

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να πετύχουμε μια αρίθμηση του συνόλου των θετικών κλασμάτων

$$\text{αντιστοιχίζοντας στο κλάσμα } \frac{\chi}{\psi} \text{ τον φυσικό αριθμό } \frac{(\chi + \psi - 1)(\chi + \psi - 2)}{2} + \chi.$$