ΣΕΝΑΡΙΟ

του Κύπρου Κυπρίδημου, μαθηματικού

ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Περίληψη

Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν το πρόσημο του τριωνύμου $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Προτείνεται να διδαχθεί σε μαθητές της Α΄ Λυκείου και ειδικότερα στην τελευταία παράγραφο του $2^{ου}$ κεφαλαίου της Άλγεβρας. Το θέμα το οποίο διαπραγματεύεται η δραστηριότητα είναι πλήρως συμβατό με το αναλυτικό πρόγραμμα, καθώς οι οδηγίες προς τους διδάσκοντες επισημαίνουν την σημασία της γραφικής παράστασης για την κατανόηση του προσήμου του τριωνύμου. Θα χρησιμοποιηθεί το αρχείο «prosimo.ggb» που έχει κατασκευαστεί στο περιβάλλον του λογισμικού Geogebra . Προβλεπόμενος χρόνος διεξαγωγής της δραστηριότητας μία (1) διδακτική ώρα.

Στοχοθεσία

Α. Διδακτικοί στόχοι

1. Να αντιληφθούν οι μαθητές ότι η τιμή του τριωνύμου μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή x.

2. Να μπορούν να συνδέουν την αλλαγή του πρόσημου των τιμών του τριωνύμου, με το πρόσημο της διακρίνουσας, το πρόσημο του α και τη γραφική παράσταση.

Β. Παιδαγωγικοί στόχοι

1. Οι μαθητές να αντιμετωπίσουν ένα "ανοιχτό" πρόβλημα.
2. Να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις που έχουν αποκομίσει από τη θεωρητική διδασκαλία και να εκτιμήσουν έτσι την πρακτική τους αξία.
3. Να πειραματίζονται με τις διάφορες μαθηματικές έννοιες θέτοντας ερωτήματα και κάνοντας διάφορες εικασίες.

4. Να συνεργάζονται με τους συμμαθητές τους και τον καθηγητή τους για την επίτευξη του στόχου τους

Προαπαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις

1. Να γνωρίζουν την γεωμετρική σημασία των ριζών του τριωνύμου
2. Να γνωρίζουν για τις διάφορες τιμές της διακρίνουσας το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.
3. Να γνωρίζουν τις μορφές του τριωνύμου και να είναι σε θέση να παραγοντοποιούν ένα τριώνυμο όταν η διακρίνουσα είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

Προαπαιτούμενες γνώσεις λογισμικού

Προτείνεται να ασχοληθούν οι μαθητές με το περιβάλλον του λογισμικού για εξοικείωση μια (1) διδακτική ώρα..

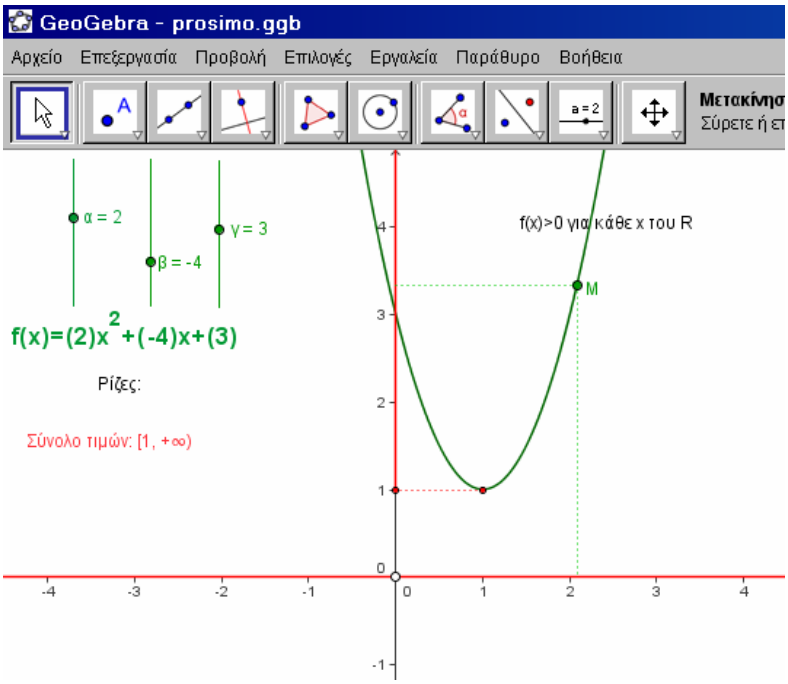
Απαιτούμενη υλικοτεχνική υποδομή

Απαιτείται ένας αριθμός Η/Υ. Στους υπολογιστές θα πρέπει να έχει εγκατασταθεί το λογισμικό 'Geogebra' το οποίο είναι ελεύθερο λογισμικό, έχει ήδη εξελληνιστεί και δεν απαιτείται οποιαδήποτε παροχή δικαιώματος χρήσης.

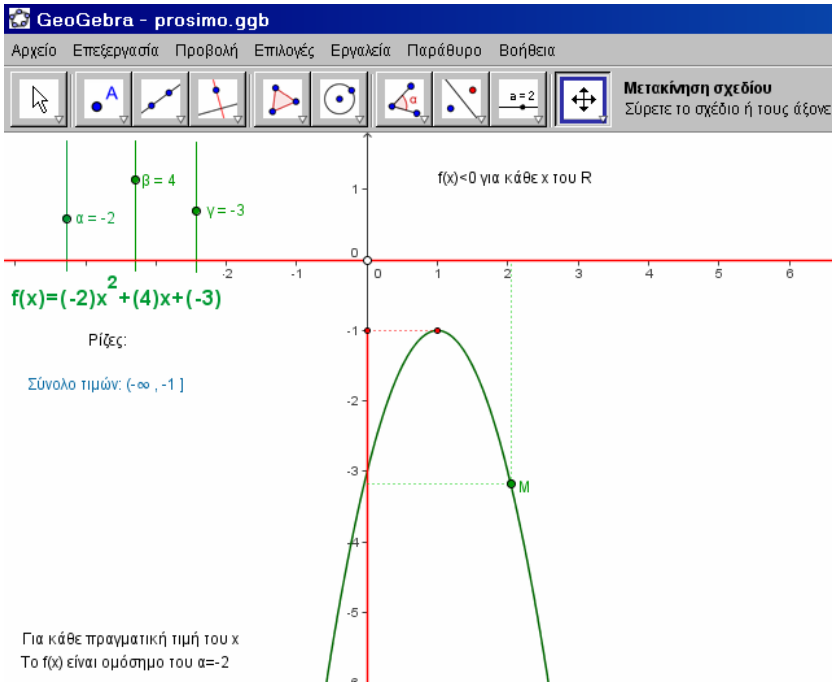
Παιδαγωγική τεκμηρίωση

Στο περιβάλλον του λογισμικού Geogebra δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να πειραματιστούν με το αρχείο «prosimo.ggb», να κάνουν εικασίες, να διερευνήσουν περιπτώσεις με διάφορες υποθέσεις, να γενικεύσουν τις παρατηρήσεις τους και να καταλήξουν σε συμπεράσματα. Αφού μετακινήσουν σταδιακά τους δρομείς α, β, γ, θα παρατηρούν και τις αντίστοιχες μεταβολές στη γραφική παράσταση του τριωνύμου. Έτσι από τις θεωρητικά άπειρες δυνατότητες που παρέχει η χρήση του αρχείου «prosimo.ggb» και από την καθοδήγηση του φύλλου εργασίας οι μαθητές θα αντιληφθούν ότι:

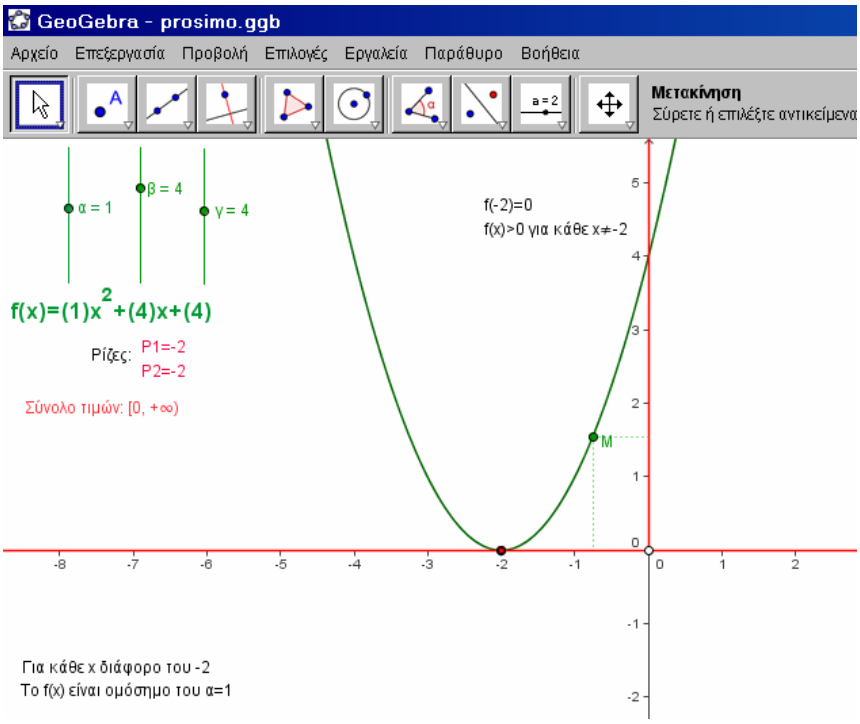
- όταν η διακρίνουσα είναι αρνητική και το α είναι θετικό τότε η γραφική παράσταση του τριωνύμου θα βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x

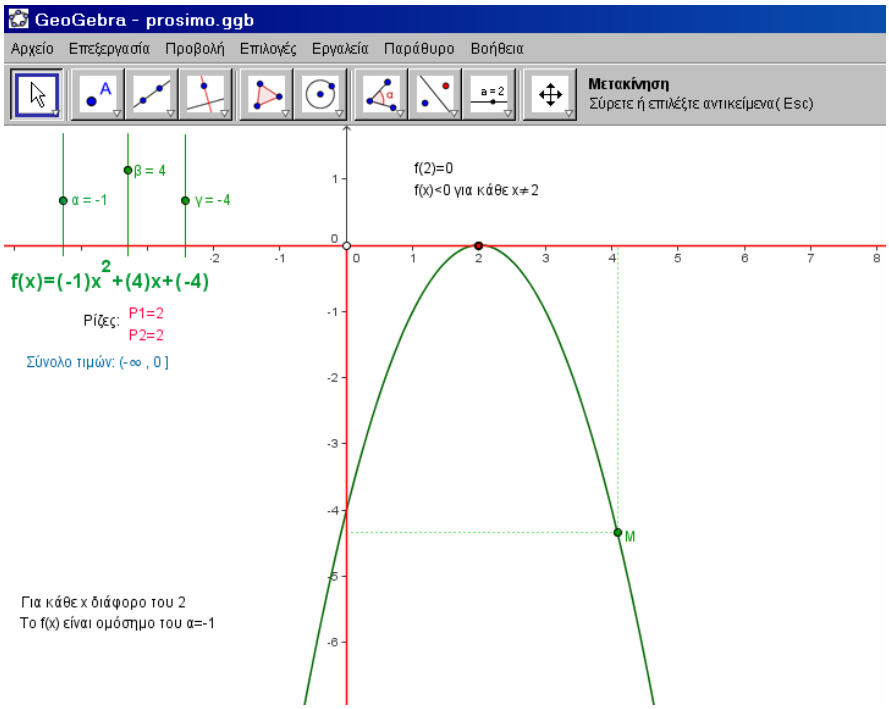


- όταν η διακρίνουσα είναι αρνητική και το α είναι αρνητικό τότε η γραφική παράσταση του τριωνύμου θα βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x

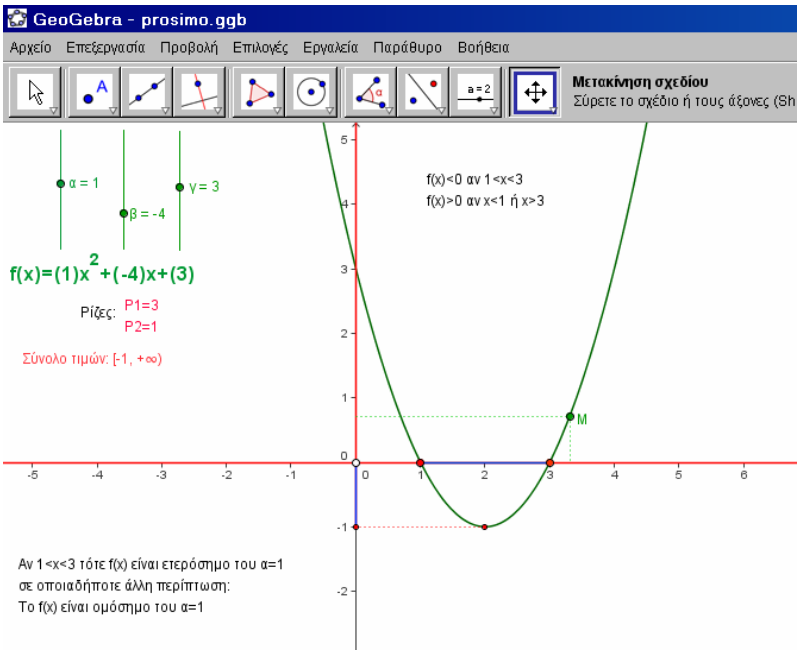


- όταν η διακρίνουσα είναι ίση με μηδέν τότε η γραφική παράσταση του τριωνύμου έχει την κορυφή της πάνω στον άξονα x΄x και οι κλάδοι της βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x ή κάτω από τον άξονα x΄x, όταν $\alpha > 0$ ή $\alpha < 0$, αντίστοιχα.

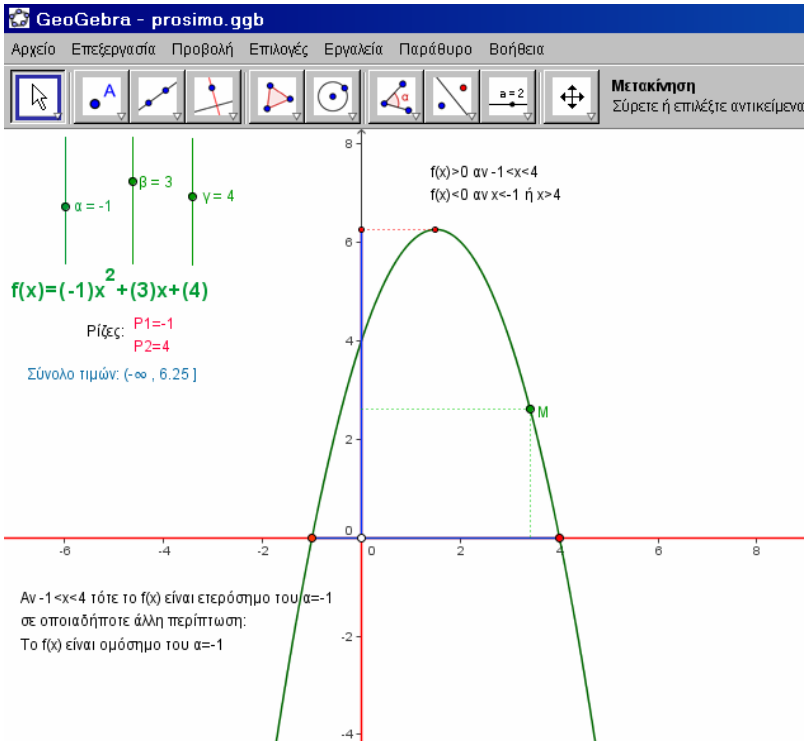




- όταν η διακρίνουσα είναι θετική και το α είναι θετικό τότε η γραφική παράσταση του τριωνύμου θα έχει ένα κομμάτι της κάτω από τον άξονα x΄x και οι κλάδοι της θα εκτείνονται απεριόριστα πάνω από τον άξονα x΄x



- όταν η διακρίνουσα είναι θετική και το α είναι αρνητικό τότε η γραφική παράσταση του τριωνύμου θα έχει ένα κομμάτι της πάνω από τον άξονα x΄x και οι κλάδοι της θα εκτείνονται απεριόριστα κάτω από τον άξονα x΄x



Στη συνέχεια θα μεταφράσουν τα δεδομένα της παρατήρησης (πάνω από τον άξονα x΄x, κάτω από τον άξονα x΄x) σε γλώσσα αλγεβρική ($\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$) για να δημιουργήσουν τους κανόνες που προσδιορίζουν το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ανάλογα με το πρόσημο του α και το πρόσημο της διακρίνουσας Δ.

Επέκταση δραστηριότητας

Με το συγκεκριμένο αρχείο οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν την επίλυση ανίσωσης 2^{ου} βαθμού.

Η δραστηριότητα αναλυτικά

Οργάνωση της τάξης

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει σχεδιαστεί να διεξαχθεί στο εργαστήριο υπολογιστών, όπου οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες των 2-3 ατόμων, δουλεύουν μπροστά στον υπολογιστή. Κάθε ομάδα συμπληρώνει το φύλλο εργασίας και καταγράφει τη μέθοδο επίλυσης που ακολούθησε .

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Ο εκπαιδευτικός μοιράζει στις ομάδες τα φύλλα εργασίας . Ζητά από τους μαθητές να διαβάσουν καλά το πρόβλημα που υπάρχει στο φύλλο εργασίας, ώστε να το κατανοήσουν. Κατά τη διάρκεια της διερεύνησης για τη λύση του αρχικού προβλήματος, ο εκπαιδευτικός προτρέπει τους μαθητές να εφευρίσκουν και να δοκιμάζουν διάφορες στρατηγικές επίλυσης, θέτει κατάλληλες ερωτήσεις και τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την προσπάθεια τους. Παράλληλα, αξιοποιεί τα λάθη των μαθητών για αναστοχασμό και ανατροφοδότηση. Συζητά μαζί τους και προσπαθεί, παίζοντας το ρόλο του συνερευνητή, να εκμαιεύσει νέες ιδέες. Προτρέπει τους μαθητές να συζητούν στο πλαίσιο της ομάδας τους τη διαδικασία λύσης και τα αποτελέσματα και να σημειώνουν τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματά τους στο φύλλο εργασίας. Στη συνέχεια, ζητά από τους μαθητές να εξαγάγουν γενικά συμπεράσματα, να καταγράψουν τα συμπεράσματά τους στο φύλλο εργασίας και να τα παρουσιάσουν στην τάξη. Καλό θα ήταν, πριν από την εφαρμογή μίας δραστηριότητας μέσα στην τάξη, ο εκπαιδευτικός να την υλοποιήσει με το λογισμικό βήμα προς βήμα έχοντας μπροστά του το φύλλο εργασίας. Με αυτό τον τρόπο, έχει

τη δυνατότητα να αξιολογήσει τις παρεχόμενες διδακτικές οδηγίες και να τις τροποποιήσει ανάλογα με το επίπεδο και τις δυνατότητες των μαθητών της τάξης.

Μια πιθανή πορεία και εξέλιξη της διδασκαλίας

Η εφαρμογή του σχεδίου διδασκαλίας στην τάξη είναι πιθανό να επιφυλάσσει ενδιαφέρουσες εκπλήξεις που μπορεί να προέρχονται από απρόσμενες διαδικασίες λύσης, ασυμβατότητες ή ελλείψεις των φύλλων εργασίας σύμφωνα με την εξέλιξη της διαδικασίας. Ωστόσο μια πιθανή πορεία και εξέλιξη της εφαρμογής του σχεδίου στην τάξη μπορεί να είναι η εξής:

Οι μαθητές παραλαμβάνουν το φύλλο εργασίας και αφού απαντήσουν στα τρία πρώτα ερωτήματα χωρίς να διατεθεί υπερβολικός χρόνος, ανοίγουν το αρχείο εργασίας prosimo.ggb που τους δίνεται στον υπολογιστή και μελετούν τα ερωτήματα που υπάρχουν στο φύλλο εργασίας. Οι μαθητές προσπαθούν μόνοι τους να αντιμετωπίσουν τα ερωτήματα που έχουν τεθεί στο φύλλο εργασίας.

Ο εκπαιδευτικός παρακολουθεί την πορεία των μαθητών και εάν κάποια ομάδα δυσκολεύεται στην επίλυση του προβλήματος και αδυνατεί να προχωρήσει, τότε μπορεί να ενθαρρύνει την ομάδα με διερευνητικές ερωτήσεις του τύπου:

1) Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική, το τριώνυμο έχει ρίζες;

2) Πως θα καταλάβουμε από το σχήμα ότι η διακρίνουσα είναι αρνητική;

3) Αν η διακρίνουσα είναι ίση με μηδέν, το τριώνυμο έχει ρίζες και πόσες;

4) Πως θα καταλάβουμε από το σχήμα ότι η διακρίνουσα είναι ίση με μηδέν;

5) Αν η διακρίνουσα είναι θετική, το τριώνυμο έχει ρίζες και πόσες;

6) Πως θα καταλάβουμε από το σχήμα ότι η διακρίνουσα είναι θετική;

7) Αν $\alpha > 0$ τότε οι κλάδοι της παραβολής πηγαίνουν προς τα πάνω ή προς τα κάτω;

8) Αν $\alpha < 0$ τότε οι κλάδοι της παραβολής πηγαίνουν προς τα πάνω ή προς τα κάτω;

9) Το σημείο (τα σημεία) τομής της παραβολής με τον οριζόντιο άξονα, ποια πληροφορία μας δίνει (δίνουν);

10) Αν η παραβολή δεν τέμνει τον οριζόντιο άξονα, τότε ποια πληροφορία έχουμε για το πρόσημο της διακρίνουσας;

Μετά την ολοκλήρωση των εργασιών τους οι ομάδες προτείνουν ένα μαθητή από κάθε ομάδα να παρουσιάσει σε ολόκληρη την τάξη τα συμπεράσματα τους και τις παρατηρήσεις τους. Όλη η τάξη συζητά τις διαφορετικές προσεγγίσεις επίλυσης του προβλήματος.

<u>Σημειώσεις για τον διδάσκοντα</u>

1. Στο φύλλο εργασίας του μαθητή, η πρώτη ερώτηση αποσκοπεί στο να κατανοήσουν οι μαθητές ότι
    a. Όταν λέμε «πρόσημο του τριωνύμου» εννοούμε το πρόσημο της εκάστοτε τιμής του τριωνύμου.
    b. Οι θετικές τιμές δίνουν σημεία πάνω από τον άξονα χ΄χ, οι αρνητικές δίνουν σημεία κάτω από τον άξονα χ΄χ και οι μηδενικές δίνουν σημεία στον άξονα χ΄χ.
2. Η δεύτερη ερώτηση στοχεύει στο να ανακαλύψουν οι μαθητές ότι το πρόσημο του τριωνύμου εξαρτάται από τη μορφή του τριωνύμου. Τα πλήρη συμπεράσματα θα τα δούνε αργότερα στο αρχείο *prosimo.ggb* του Geogebra Οι μαθητές πρέπει να προχωρούν σταδιακά από το ένα φύλλο του Excel στο επόμενο.
3. Πριν το ερώτημα 4 ο διδάσκων με τους μαθητές ολοκληρώνει την απάντηση στο ερώτημα 1.
4. Στο τέλος ο διδάσκων με τους μαθητές ολοκληρώνουν την απάντηση στο ερώτημα 6 και συμπληρώνουν τον πίνακα.

	Δ > 0	**Δ = 0**	**Δ < 0**
α > 0			
α < 0			

Φύλλο εργασίας

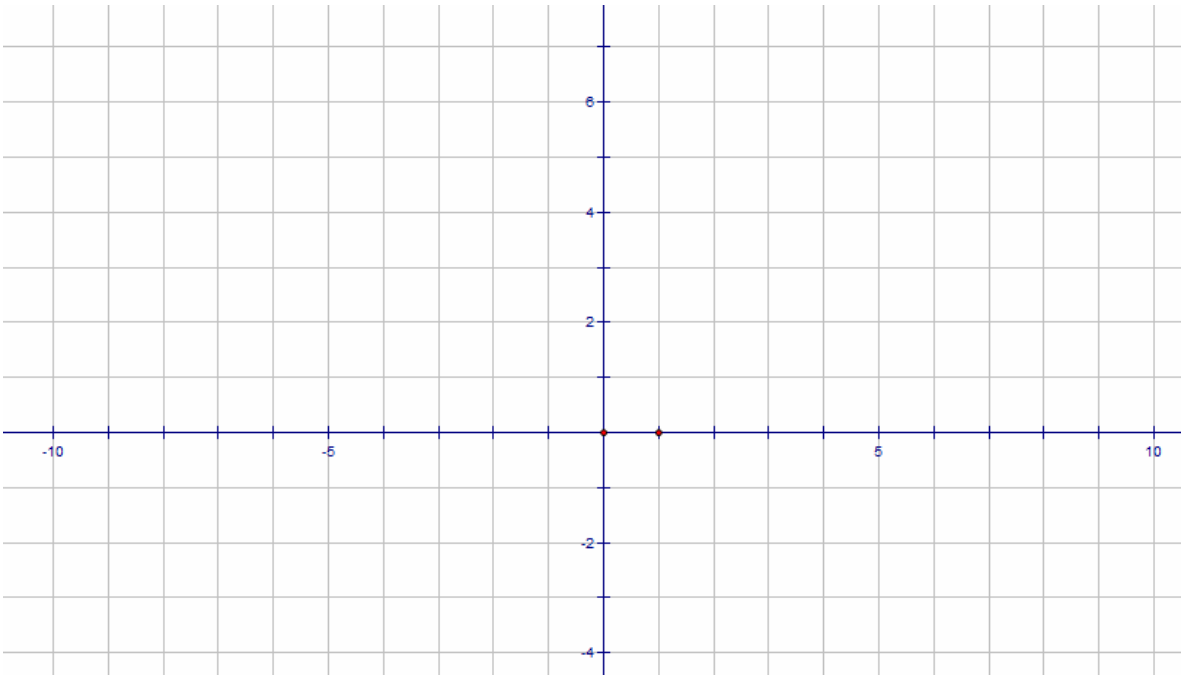
1. Δίδεται το τριώνυμο $\phi(x) = 2x^2 + x - 3$

   α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

X	-2	-3/2	-1	0	1	3/2	2
ϕ(x)							
Σημείο	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η

   β) Μπορείτε να καταλάβετε ποιο κριτήριο χρησιμοποιήθηκε για τον χρωματισμό των σημείων;

   γ) Τοποθετήστε τα σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο.



   δ) Τι έχετε να πείτε για τα κόκκινα, τι για τα γαλάζια και τι για τα μαύρα σημεία;

. . . . . .

. . . . . .

2. Ανοίξτε το αρχείο proshmo_triwnymou.xls του Excel και στο πρώτο φύλλο εργασίας παρατηρήστε τις τιμές της συνάρτησης. Πειραματιστείτε αλλάζοντας τους αριθμούς στη στήλη Α, αν αυτό σας διευκολύνει. Κάντε το ίδιο και με τα υπόλοιπα φύλλα.
3. Διατυπώστε εικασίες για το πρόσημο του τριωνύμου.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

4. Ανοίξτε το αρχείο prosimo.ggb και πειραματιστείτε αλλάζοντας με τους ολισθητήρες τις τιμές των παραμέτρων α, β και γ.

5. Λαμβάνοντας υπόψη και την απάντηση στο ερώτημα 1 και παρατηρώντας τις γραφικές τους παραστάσεις, με βάση ποια κριτήρια μπορούμε να κατατάξουμε τα τριώνυμα σε τρεις και έξι κατηγορίες; Αν δυσκολεύεστε μπορείτε να πειραματιστείτε με τα τριώνυμα που έχουν συντελεστές αυτούς του παρακάτω πίνακα.

α	1	-2	4	-1	2	-1
β	-5	2	-8	4	-2	3
γ	-6	12	4	-4	1	-5

6. Τι έχετε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου σε κάθε μια από τις έξι περιπτώσεις;