Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης
1983

Θέμα 1

Α) Αν α_ν , β_ν είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $\lim\alpha_\nu = \alpha \in \mathbb{R}$ και $\lim\beta_\nu = \beta \in \mathbb{R}$,

τότε να αποδειχθεί ότι: $\lim(\alpha_\nu \cdot \beta_\nu) = \alpha \cdot \beta$

Β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας γ_ν με $\gamma_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^{\nu+1}} \cdot \left(\sqrt{\nu^2+1} - \nu\right)$

Θέμα 2

Η συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[\alpha, \beta\right]$, έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

Να αποδειχθεί:

Α) ότι για την συνάρτηση $F(x) = \dfrac{f(x)}{x-c}$ όπου $c \notin \left[\alpha, \beta\right]$, υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0) = 0$

Β) αν $c \notin \left[\alpha, \beta\right]$, ότι υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $\left(c_0, f(c_0)\right)$ της γραμμής με εξίσωση $y = f(x)$ διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.

Θέμα 3

Α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η σχέση: $\log x \le x - 1$

Β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\log x}{1-x} & \text{αν } 0<x\neq 1 \\ -x & \text{αν } x=0 \text{ ή } x=1 \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι:

i) η η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

ii) η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0,1)$

iii) $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

Θέμα 4

Στο τετράεδρο ΟΑΒΓ να αποδειχθούν οι προτάσεις:

Α) Αν $\overrightarrow{\text{ΟΑ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΒΓ}} = 0$ και $\overrightarrow{\text{ΟΒ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΓΑ}} = 0$ τότε $\overrightarrow{\text{ΟΓ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΑΒ}} = 0$

Β) Αν $\overrightarrow{\text{ΟΑ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΒΓ}} = 0$ και d_1 είναι η απόσταση των μέσων των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΒ, ΓΑ και d_2 η απόσταση των μέσων των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΓ, ΑΒ τότε $d_1 = d_2$