Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης
1984

<u>Θέμα 1</u>

Α) Έστω ότι $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι τα διανύσματα (α_1, α_2), (β_1, β_2) αντίστοιχα ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ το εσωτερικό τους γινόμενο. Αποδείξτε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$

Β) Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOy θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Α(2,1) και έστω ότι οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται δυο από τα ύψη του έχουν εξισώσεις 3x+y-11=0 και x-y+3=0. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

<u>Θέμα 2</u>

Α) Αν $\alpha\in\mathbb{R}$ με $0<|\alpha|<1$ αποδείξτε ότι $\lim\alpha^{\nu}=0$

Β) Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία β_ν με $\beta_\nu=\dfrac{\lambda^\nu+2^{\nu+1}}{2\lambda^\nu-3\cdot 2^{\nu-1}}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 2$

<u>Θέμα 3</u>

Α) Δίνονται τα σύνολα διανυσμάτων B_1, B_2 του χώρου $\mathbb{R}^2$ με B_1={(συνθ, ημθ), (ημθ, -συνθ)} και B_2={(συνθ-ημθ, -συνθ-ημθ), (συνθ+ημθ, συνθ-ημθ)} με $\theta\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι καθένα από τα σύνολα B_1, B_2 είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$.

Β) Έστω $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα (και μόνο) διάνυσμα (x,y) του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε τα διατεταγμέα ζεύγη των συντεταγμένων να είναι (λ,μ-1), (λ-1,μ) ως προς τις βάσεις B_1, B_2 αντίστοιχα.

<u>Θέμα 4</u>

Έστω z ο μιγαδικός αριθμός x+yi με $y\neq 0$, $(x,y\in\mathbb{R})$. Θέτουμε $\omega=\dfrac{(\bar{z})^2}{z-1}$ όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z. Αποδείξτε ότι ω είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν το σημείο (x,,y) ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOy ανήκει σε μια υπερβολή από την οποία έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές της.