

Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης

1985

Θέμα 1

A) Έστω μια ευθεία που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχει εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ με $|A|+|B|\neq 0$. Έστω $P(x_1,y_1)$ ένα σημείο εκτός της ευθείας αυτής. Αποδείξτε ότι η απόσταση

του σημείου P από την ευθεία ισούται με:
$$\frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

B) Θεωρούμε δυο ευθείες που σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουν εξίσωση $x+\mu y+1=0$ και $2\mu x+2y+\lambda=0$ αντίστοιχα. (όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί) Να προσδιορίσετε για ποια ζεύγη τιμών των λ, μ οι δυο ευθείες είναι παράλληλες και έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\sqrt{2}$.

Θέμα 2

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} x + 2y + 3\omega = 0 \\ 4x + (3 + \lambda)y + 6\omega = 0 \\ 5x + 4y + (1 + \lambda)\omega = 0 \end{cases}$$

A) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.

B) Να βρεθούν όλες οι λύσεις του συστήματος για την περίπτωση που ο λ ισούται με την μικρότερη από τις τιμές που βρήκατε στο ερώτημα A του ζητήματος αυτού.

Θέμα 3

A) Έστω μια ακολουθία (β_n) . Αν υπάρχουν δυο ακολουθίες (α_n) και (γ_n) με κοινό όριο, τέτοιες ώστε για κάθε $n > \kappa$ (κ ένας συγκεκριμένος φυσικός αριθμός) να είναι $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$ τότε και η (β_n) έχει το ίδιο όριο.

B) Να βρείτε το όριο της ακολουθίας $\alpha_n = \sqrt[n]{n^2 - 2n + 3}$

Θέμα 4

A) Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα Δ και ότι στο σημείο $x_0 \in \Delta$ είναι $f'(x_0)=0$. Αν $f''(x_0) > 0$ τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

B) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2(x-3)+4$ για $x \in \mathbb{R}$. Έστω x_1, x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 είναι το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Να αποδείξετε ότι τα σημεία του επιπέδου $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.