

Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης

1986

Θέμα 1

A) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ που ανήκουν στο E. Δώστε τους παρακάτω ορισμούς:

i) Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα

ii) Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα

β) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα διανύσματα $\vec{x} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$, $\vec{y} = 2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$, $\vec{z} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

Θέμα 2

A) i) Δώστε τον ορισμό του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού.

ii) Έστω z_1, z_2 μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί. Αποδείξτε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

B) Έστω ότι $z = (2x - 3) + (2y - 1)i$ $x, y \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι στο μιγαδικό επίπεδο, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x, y) που είναι τέτοια ώστε $|2z - 1 + 3i| = 3$ είναι κύκλος.

Στη συνέχεια να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου και η ακτίνα του κύκλου.

Θέμα 3

A) Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

i) Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0

ii) Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής από δεξιά στο x_0

iii) Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής από αριστερά στο x_0

B) Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \Delta$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 3\alpha e^{x+1} + x & \text{αν } x \leq -1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\beta & \text{αν } -1 < x < 0 \\ \beta \eta \mu x + \alpha \sigma \upsilon \nu x + 1 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Να είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Θέμα 4

A) Αποδείξτε το παρακάτω θεώρημα:

Έστω μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και ότι στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι $f'(x_0) = 0$. Η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο αν για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$, $f'(x) \geq 0$ και για κάθε $x \in [x_0, \beta)$, $f'(x) \leq 0$.

B) Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το

$\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει στο $x = \frac{3}{2}$ καμπή. Στη συνέχεια για την τιμή αυτή του α να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών της f .