Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης
1987

Θέμα 1

A) i) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)= \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$

ii) Να αποδείξετε ότι δυο μη μηδενικά διανύσματα είναι κάθετα, αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.

B) Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOy δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(4,2)$ και $\mathrm{B}(3,-5)$. Θεωρούμε την ευθεία ε με εξίσωση: $7x+y-23=0$. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

Θέμα 2

A) Αν $\{v_1, v_2, \ldots, v_\rho\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου V, τότε να αποδειχθεί ότι κάθε διάνυσμα του χώρου V εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης αυτής του V.

B) Δίνεται το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, $V=\left\{(\alpha,\alpha-\beta,2\alpha+3\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$. Να αποδείξετε ότι το V είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί η διάσταση του.

Θέμα 3

A) Αν $\lim\alpha_\nu=+\infty$ ή $-\infty$ και $\forall\,\nu\in\mathbb{N}$ είναι $\alpha_\nu\neq 0$ τότε να αποδειχθεί ότι $\lim\frac{1}{\alpha_\nu}=0$

B) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας α_ν με

$$\alpha_\nu=\left(\sqrt{7\nu^4+6\nu+5}-\sqrt{7\nu^4+3\nu+3}\right)\cdot\sqrt{63\nu^2-56\nu+20}$$

Θέμα 4

A) Αν μια συνάρτηση f ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα Δ, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0\in\Delta$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

B) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^4-14x^2+24x$, $x\in\mathbb{R}$. Έστω C η γραφική παράσταση της f.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τρία σημεία Α, Β, Γ της C τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C στα σημεία Α, Β, Γ είναι παράλληλες προς τον άξονα x΄x.

ii) Να αποδείξετε ότι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται πάνω στον άξονα y΄y.