

## Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης

### 1988

**Θέμα 1**

A) Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + y = +1 \\ x + (\lambda + 1)y = 1 \\ x + y = 2\lambda + 1 \end{cases}$$

B) Να δείξετε ότι το σύνολο  $A = \left\{ \frac{4\kappa + 1}{5 - 4\lambda}, \kappa, \lambda \in \mathbb{Z} \right\}$  εφοδιασμένο με την συνήθη πράξη του πολλαπλασιασμού κλασμάτων στο  $\mathbb{R}$  είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.

**Θέμα 2**

A) Να αποδείξετε ότι κάθε ακολουθία αύξουσα και φραγμένη άνω είναι συγκλίνουσα.

B) Να βρείτε το όριο της ακολουθίας  $(\alpha_n)$  με  $\alpha_1 = 1$  και  $\alpha_{n+1} = \sqrt{4\alpha_n + 5}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

**Θέμα 3**

A) Θεωρούμε συνάρτηση  $g$  που ορίζεται σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι αν η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 \in \Delta$  και  $g(x_0) \neq 0$ , τότε και η συνάρτηση  $\frac{1}{g}$  είναι

παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και είναι  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$ .

B) Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$ .

i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση  $C$  της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $Ox$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = 2$ ,  $x = 5$ .

**Θέμα 4**

A) i) Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής

ii) Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 2px$  και η ευθεία  $y = \lambda x + \kappa$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή έχουν ένα κοινό σημείο αν και μόνο αν  $p = 2\lambda\kappa$ .

B) Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4x$ .

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση  $3x + y + 3 = 0$ .

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής που διέρχονται από το σημείο  $(-2, 1)$ .