Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης
1989

Θέμα 1

Για $\lambda \in \mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων: $\begin{cases} x+\lambda(y+z)=0 \\ -2y+z=\lambda x \\ \lambda x+y=-z \end{cases}$

Θέμα 2

Α) Να αποδείξετε ότι κάθε ν-οστή ρίζα της μονάδας είναι της μορφής:

$$\zeta_\kappa = \sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{\nu},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

Β) Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση:

$$z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0$$

Θέμα 3

Α) Να αποδειχθεί ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f'(x)=0$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.

Β) Έστω f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

α) είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο Δ

β) $f''(x)=g''(x)$ για κάθε $x\in\Delta$

γ) $0\in\Delta$ και $f(0)=g(0)$

Να αποδείξετε ότι:

i) Για κάθε $x\in\Delta$, ισχύει $f(x)-g(x)=cx$

ii) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες ρ_1,ρ_2 τότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

Α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0=\frac{\pi}{8}$

Β) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη, τη γραφική παράσταση της f, και από τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy