

**Μαθηματικά Τέταρτης Δέσμης****1989****Θέμα 1**

A) Αν για τον τετραγωνικό  $n \times n$  πίνακα  $A$  υπάρχει ο αντίστροφος, τότε να αποδείξετε ότι αυτός είναι μοναδικός.

B) Έστω ο πίνακας  $A(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

i)  $A(x_1) \cdot A(x_2) = A(x_1 + x_2)$  για κάθε  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$

ii)  $A(x) \cdot A(-x) = I_3$  όπου  $I_3$  είναι ο μοναδιαίος  $3 \times 3$  πίνακας.

**Θέμα 2**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^2 + \frac{2\alpha}{x} + \beta$ , ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) η οποία μηδενίζεται στο  $x_1 = 1$

και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $x_0 = 2$ .

A) Να βρεθούν οι τιμές των  $\alpha, \beta$

B) Να βρεθεί το είδος του ακρότατου και η τιμή του.

**Θέμα 3**

A) Να αποδείξετε την πρόταση: Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα  $\Delta$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0 \in \Delta$ , τότε η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in \Delta$  και  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

B) Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{x^3} + 1 & \text{αν } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4} & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

Να προσδιοριστεί η τιμή του πραγματικού αριθμού  $\alpha$  ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 2$

**Θέμα 4**

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \sqrt{x}$  είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

B) Αν  $\kappa \in \mathbb{R}$  και  $\kappa \geq 1$  να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\kappa} \leq \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x} dx \text{ και } \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x} dx \leq \sqrt{\kappa}$$