

## Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης

### 1990

#### Θέμα 1

A) Αν  $A$  και  $B$  είναι πίνακες  $n \times n$  και ισχύουν οι σχέσεις  $A^2 = A$  και  $A \cdot B + B \cdot A = \mathbf{0}$  όπου  $\mathbf{0}$  είναι ο μηδενικός  $n \times n$  πίνακας, τότε να αποδείξετε ότι θα είναι  $A \cdot B = B \cdot A = \mathbf{0}$

B) Έστω  $A, B, \Gamma$  πίνακες  $n \times n$  και  $I$  ο μοναδιαίος  $n \times n$  πίνακας. Αν ισχύει  $A \cdot B = \Gamma \cdot A = \mathbf{0}$  τότε να αποδείξετε ότι ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος και ότι  $A^{-1} = B = \Gamma$

Γ) Έστω  $A$  και  $B$  πίνακες  $n \times n$  όπου ο  $B$  είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $k$  θετικό ακέραιο ισχύει η σχέση  $(B \cdot A \cdot B^{-1})^k = B \cdot A^k \cdot B^{-1}$

#### Θέμα 2

A) Να αποδείξετε ότι: Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε να είναι

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

B) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)x + \delta$  όπου  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει  $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$

τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ .

#### Θέμα 3

A) Θεωρούμε κύκλο με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$ , καθώς και σημείο  $A(x_1, y_1)$  αυτού του κύκλου. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη αυτού του κύκλου στο σημείο  $A$  έχει εξίσωση  $(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$

B) Δίνονται η ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση  $5x + 3y + 2 = 0$  και ο κύκλος  $c$  με εξίσωση  $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$  που τέμνονται στα σημεία  $M$  και  $N$ .

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό  $\lambda$  η εξίσωση  $x^2 + y^2 - x - 2 + \lambda(5x + 3y + 2) = 0$  παριστάνει κύκλο ο οποίος περνάει από τα σημεία  $M$  και  $N$ . Για ποια τιμή του  $\lambda$  ο κύκλος αυτός περνάει και από την αρχή των αξόνων;

ii) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της ερώτησης (i) ανήκουν σε ευθεία  $\varepsilon_1$  της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

**Θέμα 4**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 3x + \frac{1}{2x^2}$

A) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

B) Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\alpha)$  του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , την ευθεία  $y = 3x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = 1$  και  $x = \alpha$  με  $\alpha > 1$

Γ) Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού  $E(\alpha)$  του ανωτέρω χωρίου, όταν το  $\alpha$  τείνει στο άπειρο.