Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης

1991

Θέμα 1

A) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $V_κ$ ένας υποχώρος του ο οποίος παράγεται από κ διανύσματα του V. Αν από τα κ αυτά διανύσματα υπάρχουν ρ γραμμικώς ανεξάρτητα, $1 \le \rho \le \kappa$, τα οποία μαζί με καθένα από τα υπόλοιπα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε να αποδειχθεί ότι ο $V_κ$ έχει διάσταση ρ.

B) Αν $\omega = \dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $z \ne \alpha i$ τότε να αποδειχθεί ότι:

i) ο ω είναι φανταστικός αριθμός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός αριθμός

ii) ισχύει $|\omega| = 1$ αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Θέμα 2

A) Έστω (α_ν) ακολουθία συγκλίνουσα με $\lim \alpha_\nu \ne 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει φυσικός αριθμός κ τέτοιος ώστε $\alpha_{\nu+\kappa} \ne 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

ii) για το παραπάνω κ, η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_{\nu+\kappa}}$ είναι φραγμένη.

B) Έστω β πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας. Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = \beta^{\frac{1}{\beta}}$ και $\alpha_{\nu+1} = \left(\beta^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\alpha_\nu}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι:

i) η ακολουθία (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα

ii) η ακολουθία (α_ν) είναι φραγμένη άνω από το β.

Θέμα 3

A) Αν $\mathrm{I}_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\phi^\nu x dx$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$ τότε

i) να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu > 2$ ισχύει: $\mathrm{I}_\nu = \dfrac{1}{\nu-1} - \mathrm{I}_{\nu-2}$

ii) να υπολογίσετε το I_5

B) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, με $x > 0$

i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = 4$.

Θέμα 4

Α) Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την παραπάνω έλλειψη και εφάπτεται στην ευθεία $x-y+1=0$.

Β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες εφάπτονται συγχρόνως στον κύκλο $x^2+y^2=4$ και στην παραβολή $y^2=3x$.