Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης
1992

Θέμα 1

Α) Δίνονται οι πίνακες $u=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{bmatrix}$ με $\theta \in (0,\pi)$. Να αποδειχθεί ότι οι πίνακες u και $\mathrm{A}\cdot u$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του διανυσματικού χώρου Π_{2x1} των πινάκων $2x1$.

Β) α) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης: $z^2-\sqrt{2}(1-i)z-2i=0$

β) Να δειχθεί ότι η ευθεία που ορίζουν οι εικόνες των ριζών της παραπάνω εξίσωσης στο μιγαδικό επίπεδο διέρχεται από την εικόνα μιας ρίζας της εξίσωσης $z^4+1=0$

Θέμα 2

Α) Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(x_1,y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ και $\Gamma(x_3,y_3)$ δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|$

Β) α) Δίνονται οι ημιευθείες $y=\lambda x$ και $y=-\lambda x$ με $\lambda>0$, $x>0$ και η ευθεία (ε) η οποία τις τέμνει στα σημεία Α και Β. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β συναρτήσει των συντεταγμένων του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

β) Να δειχθεί ότι το σημείο Μ γράφει τον ένα κλάδο υπερβολής όταν η ευθεία (ε) κινείται έτσι ώστε το τρίγωνο ΟΑΒ να έχει σταθερό εμβαδόν κ^2.

Θέμα 3

Α) α) Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, με τιμές στο $(0,+\infty)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\ln f(x)$, $x\in\Delta$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $f(x)\cdot f''(x)\geq\left[f'(x)\right]^2$

β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα, στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x)=\ln(x^2+2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Β) α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha^x-x$, $x\in\mathbb{R}$ και $0<\alpha<1$.

β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει η ισότητα $\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=(\lambda^2-4)(\lambda-2)$ όπου $0<\alpha<1$.

<u>Θέμα 4</u>

A) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=(x+4)\cdot e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x,y) με $-1\le x\le 1$ και $0\le y\le f(x)$.

B) α) Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f'=f$ αν και μόνο αν $f(x)=c\cdot e^{x}$, όπου c πραγματική σταθερά.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(x)\sigma\upsilon\nu x+g(x)\eta\mu x=g(x)\sigma\upsilon\nu x$ και $g(0)=1992$.