Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης
1993

Θέμα 1

Α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και $\vec{x}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{x}\right)\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$

α) Να αποδείξετε ότι $\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1\right)\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{x}\right)=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

β) Αν $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\neq 1$ να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$

Β) Για τον αντιστρέψιμο πίνακα Α τύπου νxν ορίζουμε τα πολυώνυμα: $f(x)=\left|\mathrm{A}-x\mathrm{I}\right|$, $g(x)=\left|\mathrm{A}^{-1}-x\mathrm{I}\right|$ όπου Ι ο μοναδιαίος νxν πίνακας και x πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι αν $f(x_0)=0$ τότε α) $x_0\neq 0$ και β) $g\left(\frac{1}{x_0}\right)=0$

Θέμα 2

Α) Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{(z-1)\left(\bar{z}+1\right)}{\left(z+\bar{z}\right)}$ με $z\in C$ και $\mathrm{Re}(z)\neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι: $f\left(-\frac{1}{z}\right)=f\left(\bar{z}\right)$

β) Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία Μ(x, y) για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha x+\beta yi$ με $\alpha,\beta,x,y\in\mathbb{R}$ και $\alpha\beta x\neq 0$ ικανοποιούν τη σχέση: $\mathrm{Re}\left(f(z)\right)\neq 0$

Β) Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta>0$ και το σημείο Κ(0, 2β). Μια μεταβλητή ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σταθερό σημείο Κ και τέμνει τις εφαπτομένες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονα της στα σημεία Μ και Ν.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο ΜΝ ως συνάρτηση του λ.

β) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο κύκλος με διάμετρο ΜΝ να διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

Θέμα 3

Α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] τότε να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχουν $m, \mathrm{M} \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $m(\beta - \alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le \mathrm{M}(\beta - \alpha)$

β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$

Β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4$, $x > 0$

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{x}^{x+1} f(t)dt$

Θέμα 4

Α) Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10 m του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα. Το σημείο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 2m/\sec$ και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση $s(t) = \upsilon t$, $t \in [0,5]$ όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν E(t) του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου.

β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6m;

Β) Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\int_{\alpha}^{x} e^{-t} f(t)dt = e^{-x} - e^{-\alpha} - e^{-x} \cdot f(x) \text{ με } x, \alpha \in \mathbb{R}$$