

Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης

1994

Θέμα 1

A) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$

α) Αν ε είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f στο σημείο $M(2\alpha, 8\alpha^2)$ $\alpha > 0$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C , την ευθεία ε και τον άξονα $y'y$.

β) Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ε με την ευθεία MO , όπου O είναι η αρχή των αξόνων. Να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του α και να βρείτε την μέγιστη τιμή της εφθ όταν το α μεταβάλλεται ($\alpha > 0$).

B) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$

Θέμα 2

A) Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων

$$(z^2 + 1)^2 + z^3 + z = 0 \text{ και } z^{16} + 2z^{14} + 1 = 0$$

B) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , w και w_1 , τέτοιους ώστε $w = z - zi$ και $w_1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha i$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι αν το α μεταβάλλεται στο \mathbb{R}^* και ισχύει $w = \bar{w}_1$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.

Θέμα 3

A) Έστω ρ πραγματικός αριθμός, $A(x)$, $B(x)$ πολώνυμα με πραγματικούς συντελεστές, ώστε $B(\rho) \neq 0$ και το $A(x)$ έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολώνυμο $f(x)$ τέτοιο ώστε $A(x) \cdot B(x) = (x - \rho)^2 f(x)$, αν και μόνο αν $A(\rho) = A'(\rho) = 0$.

B) Έστω n ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσο του 1. Να βρείτε τις τιμές των κ , λ για τις οποίες το πολώνυμο $Q(x) = x^n (nx^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 8)$ έχει παράγοντα το $(x - 2)^2$

Θέμα 4

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής με εστία το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x = -\frac{p}{2}$ είναι $y^2 = 2px$.

B) Έστω n θετικός ακέραιος και $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 2n\}$ ένας δειγματικός χώρος. Δίνονται οι πιθανότητες $P(k) = \frac{1}{2^k}$ για $k = 1, 2, \dots, 2n$. Να υπολογίσετε :

α) Την πιθανότητα $P(0)$

β) Την πιθανότητα $P(A)$ του ενδεχομένου $A = \{2, 4, 6, \dots, 2n\}$