Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης
1995

Θέμα 1

Α) Έστω ν ένας θετικός ακέραιος και Ι, Ο είναι αντιστοίχως ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας νχν . Έστω Α, Β είναι πίνακες νχν τέτοιοι ώστε $\mathrm{A} = \mathrm{B}^2 + \mathrm{I}$ και $\mathrm{B}^4 = \mathrm{O}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $\mathrm{A}^{\kappa} = \mathrm{I} + \kappa \mathrm{B}^2$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}^*$

ii) ο πίνακας $\mathrm{I} + \mathrm{A}^6 - \mathrm{A}^8$ είναι αντιστρέψιμος.

β) Αν ο ν είναι περιττός να αποδείξετε ότι $|2\mathrm{A} + 3\mathrm{I}| \le 0$.

Β) α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, ισχύει $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}\left(z_1 \cdot \bar{z_2} \right) = 0$

β) Έστω μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha^2 + i \cdot f(\alpha)$, $w = f(\beta) + i \cdot \beta^2$ με $\alpha\beta \ne 0$. Αν $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Θέμα 2

Α) Δίνονται οι ελλείψεις $c_1 : \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $c_2 : \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = 1$ με $0 < \alpha < \beta$. Η ημιευθεία $y = (\varepsilon\varphi\theta)x$, $x > 0$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ τέμνει την c_1 στο σημείο $\Gamma_1(x_1, y_1)$ και την c_2 στο σημείο $\Gamma_2(x_2, y_2)$.

α) Αν λ_1 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της c_1 στο σημείο Γ_1 και λ_2 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της c_2 στο σημείο Γ_2 να αποδείξετε ότι: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = (\varepsilon\varphi\theta)^{-2}$

β) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $f(\theta) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

Β) Δίνεται θετικός ακέραιος αριθμός ν, τέτοιος ώστε $(1+i)^{\nu} = 16$. Έστω $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \nu\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Εκλέγουμε τυχαίως ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda \in \Omega$. Αν $f(x) = 2x^2 - 4x + \lambda$ με $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $f(x) = 0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες.

Θέμα 3

Α) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$ και η συνάρτηση $f(x) = (x-\kappa)^5 \cdot (x-\lambda)^3$ με $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι :

α) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{5}{x-\kappa} + \dfrac{3}{x-\lambda}$ για κάθε $x \neq \kappa$ και $x \neq \lambda$.

β) Η συνάρτηση $g(x) = \ln|f(x)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ, λ).

Β) α) Να αποδείξετε ότι για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο διάστημα [α, β] ισχύει: Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο [α, β].

β) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^\beta f(x-t)dt$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $F'(x_0) = 0$ τότε $F(x_0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 4

Α) Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$ τη συνεχή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία $\int_\alpha^\beta f(t)dt = 0$ και τη συνάρτηση $g(x) = 2 + \dfrac{1}{x}\int_\alpha^x f(t)dt$, $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν:

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(x_0, g(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β) $g(x_0) = 2 + f(x_0)$

Β) Να βρείτε τη συνάρτηση $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(0) = 1995$, $f'(0) = 1$ και $1 + \int_0^x f''(t) \cdot \sigma\upsilon\nu t dt = \sigma\upsilon\nu^2 x + \int_0^x f'(t) \cdot \eta\mu t dt$