Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης
1996

Θέμα 1

Α) Δίνονται οι νxν πίνακες Α, Β, Γ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $\mathrm{A}+\mathrm{B}+1996\mathrm{AB}=\mathrm{O}$, $\mathrm{B}+\Gamma+1996\mathrm{B}\Gamma=\mathrm{O}$, $\Gamma+\mathrm{A}+1996\Gamma\mathrm{A}=\mathrm{O}$, όπου Ο ο μηδενικός νxν πίνακας.

α) Να αποδείξετε ότι οι πίνακες $\mathrm{I}+1996\mathrm{A}$, $\mathrm{I}+1996\mathrm{B}$ και $\mathrm{I}+1996\Gamma$ είναι αντιστρέψιμοι και ότι $\mathrm{AB}=\mathrm{B}\Gamma=\Gamma\mathrm{A}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}=\mathrm{B}=\Gamma$.

Β) Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση της εικόνας του μιγαδικού αριθμού $z=3+i\sqrt{3}$ από τις εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^6=64$

Θέμα 2

Α) α) Να αποδείξετε ότι , αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ είναι $f'(x)=0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

β) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g που έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$. Αν οι f και g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις $f'=g$, $g'=-f$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν οι συναρτήσεις f'' , g'' και είναι συνεχείς. Αποδείξτε ακόμα ότι ισχύουν οι σχέσεις $f''+f=g''+g=0$ και ότι η συνάρτηση $h=f+g$ είναι σταθερή.

Β) Θεωρούμε τις παραπάνω συναρτήσεις f και g. Να αποδείξετε ότι αν x_1 και x_2 είναι δύο ρίζες της f και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ τότε η g έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα (x_1,x_2).

Θέμα 3

Α) Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$

α) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο που η διχοτόμος του πρώτου τεταρτημορίου τέμνει την έλλειψη έχει κλίση $-0,5$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

β) Έστω Α το σημείο του πρώτου τεταρτημορίου στο οποίο η ευθεία $y = \lambda x$, $\lambda > 0$ τέμνει την παραπάνω έλλειψη . Αν μ είναι η κλίση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο Α τότε να εκφράσετε το γινόμενο $\lambda \cdot \mu$ ως συνάρτηση των ημιαξόνων α , β.

Β) Να αποδείξετε τις ανισότητες:

α) $\eta\mu x < 2x$, $x > 0$

β) $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{3}$, $x > 0$

<u>Θέμα 4</u>

Α) Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\int_0^1 e^{1-x} f(x)dx = f(x) + e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) + f(\alpha + \beta - x) = c$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2}\big(f(\alpha) + f(\beta)\big)$$

.