Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης
1997

Θέμα 1

Α) Να αποδείξετε ότι αν ένας τετραγωνικός πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος, τότε ο αντίστροφος του είναι μοναδικός.

Β) Έστω Α, Β είναι νxν πίνακες και έστω ότι οι πίνακες Α, Β και $2AB-3I_\nu$ είναι αντιστρέψιμοι. Να αποδειχθεί ότι οι πίνακες $\Gamma = 2A - 3B^{-1}$ και $\Delta = \left(2A-3B^{-1}\right)^{-1} - \frac{1}{2}A^{-1}$ είναι αντιστρέψιμοι.

Θέμα 2

Α) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω α πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $A=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ και $B=\frac{f'(\alpha)-Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$. Αν φ είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}-\{\alpha\}$, τέτοια ώστε $\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2 g(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{(x-\alpha)} + \frac{\phi(x)}{g(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{\alpha\}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha}\phi(x)$

Β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε $(x-2)f''(x)+\left(\alpha\eta\mu x-\beta x^2\right)f'(x)=e^{x-2}-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho\neq 2$, ώστε $f'(\rho)=0$. Να εξετάσετε αν το $f(\rho)=0$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

Θέμα 3

Α) Δίνεται πραγματική συνάρτηση g, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $g(x)>0$ και $g''(x)g(x)-\left[g'(x)\right]^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

ii) $g\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)\leq\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

Β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε, υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε να ισχύει $g(x+y)=e^{y}g(x)+e^{x}g(y)+xy+\alpha$ για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $g(0)=-\alpha$

ii) $g'(x)=g(x)+g'(0)e^{x}+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>Θέμα 4</u>

Έστω C είναι η γραμμή του επιπέδου με εξίσωση $y=\alpha x^{3}+\beta x^{2}+\gamma x+\delta$ όπου α, β, γ, δ είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha\neq 0$. Έστω $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$, $\Delta(x_4, y_4)$ είναι σημεία της C. Υποθέτουμε ότι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ συμπίπτει με το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ και επίσης υποθέτουμε ότι το μέσο αυτό δεν ανήκει στην ευθεία που έχει εξίσωση $\beta+3\alpha x=0$.

Α) Να αποδειχθεί ότι $x_1\cdot x_2=x_3\cdot x_4$

Β) Να αποδειχθεί ότι το σημείο Α συμπίπτει με το σημείο Γ ή με το σημείο Δ.