Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης
1998

Θέμα 1

Α) α) Αν ο μιγαδικός αριθμός z_0 είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_\nu$ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha_\nu \neq 0$, να αποδείξετε ότι και ο $\overline{z_0}$ συζυγής του z_0 είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

β) Αν η πολυωνυμική εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί, έχει ως ρίζα το μιγαδικό αριθμό $2-3i$ να βρείτε τα β, γ καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ στο σημείο $\mathrm{A}\left(1, f(1)\right)$ όταν το x μεταβάλλεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Β) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f\left(f(x)\right) + \left(f(x)\right)^3 = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «ένα προς ένα»

β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(2x^3 + x\right) = f(4-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 2

Α) Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z_0 με $\mathrm{Im}(z_0) < 999$ και το σύνολο Α των μιγαδικών αριθμών z με $z \neq z_0$ και $z \neq \overline{z_0}$ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{1}{|z - z_0|} + \frac{1}{|z - \overline{z_0}|} = \frac{1998}{|z - z_0||z - \overline{z_0}|}.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση που μπορούν να απέχουν μεταξύ τους οι εικόνες δυο μιγαδικών αριθμών του συνόλου Α.

Ποιοι είναι αυτοί οι μιγαδικοί αριθμοί;

Να εξετάσετε την περίπτωση $z = \overline{z_0}$.

Β) Ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει $g(x)$ μονάδες του παραγόμενου προϊόντος. Αν $g(x) = \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}\left(1 - e^{-\mu x}\right)$, $x \geq 0$ όπου M_0, Μ και μ είναι θετικές σταθερές, να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της $g(x)$. Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0;

Θέμα 3

Α) Δίνεται ο νxν πίνακας Α με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς για τον οποίο ισχύει: $\mathrm{A}^2-2(\lambda-2)^2\mathrm{A}+\mathrm{I}_\nu=\mathrm{O}$ όπου I_ν είναι ο μοναδιαίος νxν πίνακας και λ πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι ο πίνακας $\mathrm{A}+\mathrm{I}_\nu$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε λ.

Β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)|\mathrm{A}+x\mathrm{I}|+(x-1)|\mathrm{A}-x\mathrm{I}|=1-x^2$ όπου Α είναι ο πίνακας του ερωτήματος (Α) και x πραγματικός αριθμός έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(-1,1)$. Με $|\mathrm{A}+x\mathrm{I}|$ και $|\mathrm{A}-x\mathrm{I}|$ συμβολίζουμε την ορίζουσα του πίνακα $\mathrm{A}+x\mathrm{I}$ και $\mathrm{A}-x\mathrm{I}$ αντίστοιχα.

Γ) Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ με πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$2\mathrm{P}(1)=2\mathrm{P}(3)=2\mathrm{P}(5)=2\mathrm{P}(7)=3\mathrm{P}(2)=3\mathrm{P}(4)=3\mathrm{P}(6)=3\mathrm{P}(8)$ και το ενδεχόμενο $\mathrm{B}=\left\{\lambda\in\Omega\left(\begin{array}{l}\text{το σύστημα ΑΧ = Χ έχει}\\\text{τουλάχιστον δυο λύσεις}\end{array}\right)\right\}$ όπου Χ ένας νx1 άγνωστος πίνακας και Α ο πίνακας του ερωτήματος (Α). Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Β.

Δ) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+\gamma x+4$ όπου ο συντελεστής γ επιλέγεται τυχαία από το δειγματικό χώρο Ω του ερωτήματος (Γ). Αν $\Gamma=\left\{\gamma\in\Omega\left(\begin{array}{l}\text{η εξίσωση } f(x)=0\\\text{έχει πραγματικές ρίζες}\end{array}\right)\right\}$ να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ και να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα Β (του ερωτήματος (Γ)) και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Θέμα 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x)>0$, $f'(x)+2xf(x)=0$, $x>0$, και η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,1)$.

Α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f.

Β) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{x-1}{2x^2}f(x)<\int_1^x\dfrac{f(t)}{2t^2}dt<\dfrac{x-1}{2}$, για κάθε $x>1$

Γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $F(x)=\int_1^x\left(1+\dfrac{1}{2t^2}\right)f(t)dt$, $x>1$

Δ) Να αποδείξετε ότι $2e\int_1^x e^{-t^2}dt<1$ για κάθε $x>1$.