Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης
1999

<u>Θέμα 1</u>

Α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f:\Delta \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f'(x_0)=0$.

Β) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη η οποία σε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση $f''(x)>4\left(f'(x)-f(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>Θέμα 2</u>

Α) Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $\mathrm{M}(x,y)$ που είναι τέτοια ώστε $|z-1|^2+|z-3-2i|^2=6$ είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.

β) Έστω Ο η αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι οι δυο εφαπτόμενες που άγονται από το Ο προς τον παραπάνω κύκλο. Να βρείτε τις συντεταγμένες των δυο σημείων επαφής $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2$.

Β) Έστω $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και έστω C κύκλος με κέντρο $(2,1)$ και ακτίνα 1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :

Ε={ $\omega\in\Omega$ / το σημείο Μ(ω,1) είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C}

Ζ={ $\omega\in\Omega$ / το σημείο Ν(2,ω) είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C}.

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Ε, Ζ και $\mathrm{E}\cup\mathrm{Z}$.

Θέμα 3

Α) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι $|\overrightarrow{\text{AB}}| = 4$, $|\overrightarrow{\text{AΓ}}| = 6$ και η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\text{AB}}$ και $\overrightarrow{\text{AΓ}}$ είναι $\frac{\pi}{3}$. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τότε:

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{\text{AM}}$

β) Να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{\text{AB}}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{\text{AM}}$ είναι το διάνυσμα $\frac{14}{19}\overrightarrow{\text{AM}}$.

Β) Έστω Α, Β νxν πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί. Έστω ότι ισχύει $\text{A}^2 + \text{AB} + \text{I} = \text{B}^2 + \text{BA} + \text{I} = \text{O}$ όπου Ι είναι ο νxν μοναδιαίος πίνακας και Ο είναι ο μηδενικός νxν πίνακας. Να αποδείξετε ότι:

α) i) Ο πίνακας $\text{A} + \text{B}$ έχει αντίστροφο και ii) $\text{A} = \text{B}$

β) ο ν είναι άρτιος.

Θέμα 4

Α) Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \dfrac{2t+3}{t+2}$, $t \in [1,4]$

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\text{I} = \int_1^4 f(t)dt$

β) Έστω η συνάρτηση $g(x) = \int_1^4 f(t)\dfrac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}dt$, $x > 0$

i) Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x^2}} \le e^{\frac{t}{x^2}} \le e^{\frac{4}{x^2}}$ για κάθε $t \in [1,4]$ και $x > 0$

ii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Β) Έστω $h : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση

$$h(x) = 1999(x-1) + \int_1^x \frac{h(t)}{t}dt \quad \text{για κάθε } x \ge 1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $h(x) = 1999x\ln x$, $x \ge 1$

β) Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.