ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2000
ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2000
ΔΕΣΜΗ ΤΕΤΑΡΤΗ (4η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ :ΤΡΕΙΣ (3)

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Β. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ τέτοια, ώστε:

$$2xf(x)+(x^2+1)\,f'(x)=e^x \text{ για κάθε } x\in R, \text{ με } f(0)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in R$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}\beta & -1\\ \beta & -2\end{bmatrix}$, όπου $\beta\in R$.

Αν $\lambda\in R$, θεωρούμε το 2x2 γραμμικό σύστημα $AX=\lambda X$ όπου $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας-στήλη των αγνώστων.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\beta\in R$ υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές του $\lambda\in R$, για τις οποίες το παραπάνω γραμμικό σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.

Β. Έστω Α ένας 2x2 πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$A=\begin{bmatrix}2+|A| & 4|A|+1\\ 1 & 2|A|\end{bmatrix} \text{ και } |A|>0$$

όπου $|A|$ είναι η ορίζουσα του πίνακα Α.

α) Να αποδείξετε ότι $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

β) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας B=5I-A, όπου I ο 2x2 μοναδιαίος πίνακας, είναι αντίστροφος του A και να βρείτε τον πίνακα X για τον οποίο ισχύει :

$$BX=A$$

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

A. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο R.

α) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^3 f(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int_1^7 f(x)dx$$

β) ΄Εστω ότι

$$4\int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2004$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,7)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)= 334$.

B. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f:R \to R$ που ικανοποιεί την ισότητα : $\int_0^x \left(1+t^2\right)f(t)\,dt = x^2 + \int_0^1 6x\left(t^2+t\right)dt$, $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{2x+5}{x^2+1}$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της A (0, f(0)).

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

A. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=x^2-4x+3$, $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x)+f(y)=0 \text{ με } x,y \in R$$

παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x΄x.

Β. Έστω Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και X,Y ενδεχόμενά του τέτοια, ώστε $X \subseteq Y$.

Έστω P(X), P(Y) είναι οι πιθανότητες των X,Y αντιστοίχως.

Έστω ότι οι πραγματικοί αριθμοί P(X), P(Y) είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f, με

$$f(x)=4x^3-5x^2+2x+2000,\ x \in R.$$

Να υπολογίσετε

α) τις πιθανότητες P(X), P(Y)

β) τις πιθανότητες $P(X \cap Y)$, $P(X \cup Y)$ και $P(Y \cap X')$ όπου X' το αντίθετο ενδεχόμενο του X.

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, δέσμη, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης : τρεις (3) ώρες.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : μία (1) ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης.

ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΕΓΕ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ