

Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Πέμπτη 30 Μαΐου 2002

Θέμα 1ο

A) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα

της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

B)1) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

B)2) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο (α, β) , τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή.

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τότε

$$\int f(x)dx = x \cdot f(x) - \int x \cdot f'(x)dx$$

ε. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Θέμα 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(v) = i^v z$, $v \in \mathbb{N}^*$.

α. Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

β. Αν $|z| = \rho$ και $\text{Arg}(z) = \theta$, να δείξετε ότι $f(13) = \rho \left[\sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + i\eta\mu \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right]$.

γ. Αν $|z| = 2$ και $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα

σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0 , z και $f(13)$.

Θέμα 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

- α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.
- β. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Θέμα 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0.$$

- i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .
- ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x)$, για κάθε $x > 0$.
- iii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$.