

## Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

### Πέμπτη 29 Μαΐου 2003

#### Θέμα 1ο

A) Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

B) Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν  $z$  ένας μιγαδικός αριθμός και  $\bar{z}$  ο συζυγής του, τότε ισχύει  $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ .

β. Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .

γ. Για κάθε συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , ισχύει  $\int f'(x)dx = f(x) + c$ ,  
 $c \in \mathbb{R}$

δ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

ε. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και  $f'(x_0) = 0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ .

#### Θέμα 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = \alpha + \beta i$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $w = 3z - i\bar{z} + 4$ , όπου  $\bar{z}$  είναι ο συζυγής του  $z$ .

A) Να αποδείξετε ότι  $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$  και  $\operatorname{Im}(w) = -\alpha + 3\beta$ .

B) Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 12$ , τότε οι εικόνες του  $z$  κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$ .

Γ) Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$ , έχει το ελάχιστο μέτρο.

**Θέμα 3ο**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x^3 + x$ .

A) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση.

B) Να αποδείξετε ότι  $f(e^x) \geq f(1+x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0,0)$  είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της  $f$  και της  $f^{-1}$ .

Δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ , τον άξονα των  $x$  και την ευθεία με εξίσωση  $x = 3$ .

**Θέμα 4ο**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο  $(\alpha, \beta)$ . Αν ισχύει  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$  και υπάρχουν αριθμοί  $\gamma \in (\alpha, \beta)$ ,  $\delta \in (\alpha, \beta)$ , έτσι ώστε  $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ , να αποδείξετε ότι:

A) Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ .

B) Υπάρχουν σημεία  $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$  τέτοια ώστε  $f'(\xi_1) < 0$  και  $f'(\xi_2) > 0$ .

Γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .