

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

**Μονάδες 8**

**A.2** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 4**

**A.3** Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 3**

**B.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Αν  $f$  συνάρτηση συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  ισχύει  $f(x) \geq 0$  τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$  τότε  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

- γ. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

- δ. Αν  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε

$$\left( \int_{\alpha}^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

**Μονάδες 2**

- ε. Αν  $\alpha > 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$ .

**Μονάδες 2**

### **ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i} \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού  $z$  ανήκει στον κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

**Μονάδες 9**

- β. Έστω  $z_1, z_2$  οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$$

για  $\alpha = 0$  και  $\alpha = 2$  αντίστοιχα.

- ι. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$ .

**Μονάδες 8**

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^\nu$$

για κάθε φυσικό αριθμό  $\nu$ .

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου  $\theta \in \mathbb{R}$  μια σταθερά με  $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

α. Να αποδειχθεί ότι η  $f$  παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

**Μονάδες 7**

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

**Μονάδες 8**

γ. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και  $x_3$  η θέση του σημείου καμπής της  $f$ , να αποδειχθεί ότι τα σημεία  $A(x_1, f(x_1))$ ,  $B(x_2, f(x_2))$  και  $\Gamma(x_3, f(x_3))$  βρίσκονται στην ευθεία  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ .

**Μονάδες 3**

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και την ευθεία  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω  $f$  μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα  $[0, 1]$  για την οποία ισχύει  $f(0) > 0$ . Δίνεται επίσης συνάρτηση  $g$  συνεχής στο διάστημα  $[0, 1]$  για την οποία ισχύει  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ .

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t) dt, \quad x \in [0, 1],$$

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

**α.** Να δειχθεί ότι  $F(x) > 0$  για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(0, 1]$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x) \cdot G(x) > F(x)$$

για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(0, 1]$ .

**Μονάδες 6**

**γ.** Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(0, 1]$ .

**Μονάδες 4**

**δ.** Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left( \int_0^x f(t)g(t) dt \right) \cdot \left( \int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)}{\left( \int_0^x g(t) dt \right) \cdot x^5} .$$

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**