

Όνοματεπώνυμο Εξεταζόμενου:

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

Θ Ε Μ Α Τ Ω Ν

Γραπτών Προαγωγικών Εξετάσεων

ΘΕΜΑ 1^ο

A.

- i. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες όταν η διακρίνουσά της Δ , είναι θετική. ($\Delta > 0$) (Μονάδες 3)
- ii. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ είναι αδύνατη όταν η διακρίνουσά της Δ , είναι αρνητική. ($\Delta < 0$) (Μονάδες 3)
- iii. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει μια διπλή ρίζα όταν η διακρίνουσά της Δ , είναι ίση με 0. ($\Delta = 0$) (Μονάδες 3)

B. Γνωρίζουμε ότι όταν $\Delta > 0$ ισχύει: $x_1, x_2 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$. Έστω $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}. \text{ Έχουμε:}$$

$$i. S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta} - \beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} =$$

$$\frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{(Μονάδες 8)}$$

$$ii. P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta + \sqrt{\Delta}) \cdot (-\beta - \sqrt{\Delta})}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \Delta}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} =$$

$$\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{(Μονάδες 9)}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + 8 = 0$ είναι $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$ (Μονάδες 4)

B. Ισχύουν $f(2) = 0$ και $f(4) = 0$. Άρα: $\begin{cases} f(2)=0 \\ f(4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha 2^2 + \beta 2 + 8 = 0 \\ \alpha 4^2 + \beta 4 + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta + 8 = 0 \\ 16\alpha + 4\beta + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -4 \\ 4\alpha + \beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -4 \\ 2\alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -4 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -6 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

(Μονάδες 10)

Γ. Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 8$, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο για

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = 3 \quad (\text{Μονάδες } 3)$$

Δ. Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 6x + 8$ είναι: $f(3) = -1$ (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι σχέσεις: $A = |2x + 3|$, $B = |3x - 8|$, $\Gamma = 5x - 3y + 6$ και $|y| < 3$:

A. $B = A \Leftrightarrow |3x - 8| = |2x + 3| \Leftrightarrow 3x - 8 = 2x + 3$ ή $3x - 8 = -2x - 3 \Leftrightarrow$
 $x = 11$ ή $5x = 5 \Leftrightarrow x = 11$ ή $x = 1$ (Μονάδες 5)

B.

$$A < 5 \Leftrightarrow |2x + 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x + 3 < 5 \Leftrightarrow -8 < 2x < 2 \Leftrightarrow -4 < x < 1$$

(Μονάδες 6)

i. $-4 < x < 1 \Leftrightarrow -20 < 5x < 5$ (Μονάδες 2)

ii. $|y| < 3 \Leftrightarrow -3 < y < 3$ (Μονάδες 2)

iii. $-3 < y < 3 \Leftrightarrow -9 < -3y < 9$ (Μονάδες 4)

iv. Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις: $-20 < 5x < 5$, $-9 < -3y < 9$
και έχουμε $-29 < 5x - 3y < 14 \Leftrightarrow -23 < 5x - 3y + 6 < 20 \Leftrightarrow -23 < \Gamma < 20$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 + \lambda - 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

Η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες, όταν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 + \lambda - 4) > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 16 > 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$-4\lambda > -16 \Leftrightarrow 4\lambda < 16 \Leftrightarrow \underline{\lambda < 4}$$

(Μονάδες 5)

A. Να βρείτε συναρτήσει του λ τα

i. $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda^2 + \lambda - 4$ (Μονάδες 5)

ii. $S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = -(-2\lambda) = 2\lambda$.. (Μονάδες 5)

B. $x_1 \cdot x_2 = 2x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 2(x_1 + x_2) \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 4 = 4\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $\lambda = -1$ ή $\lambda = 4$, απορρίπτεται διότι $\lambda < 4$. Άρα $\underline{\lambda = -1}$ (Μονάδες 10)