



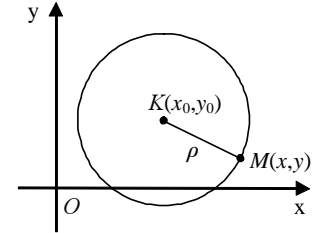
Όνοματεπώνυμο Εξεταζόμενου:

Θ Ε Μ Α Τ Α

Γραπτών Προαγωγικών Εξετάσεων

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Να δείξετε ότι σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση την: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.



(Μονάδες 13)

Απάντηση

Σύμφωνα με τον ορισμό του κύκλου, ένα σημείο $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου ανήκει στον κύκλο C αν και μόνο αν η απόσταση του $M(x, y)$ από το κέντρο $K(x_0, y_0)$ είναι ίση με ρ . Δηλαδή αν και μόνο αν

$$(KM) = \rho \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2.$$

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα απαντήσεων τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- 1. Λάθος :** Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$ παράλληλο στην ευθεία $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$
- 2. Σωστό :** Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση την: $x_1x + y_1y = \rho^2$.
- 3. Λάθος :** Αν δυο διανύσματα έχουν το ίδιο μέτρο τότε είναι παράλληλα.
- 4. Σωστό:** Οι εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $|\alpha| > |\beta|$ είναι σημεία του άξονα $x'x$
- 5. Λάθος :** Η παραβολή $y^2 = 2px$ έχει εστία το σημείο $E(p, 0)$ και διευθετούσα την ευθεία $(\delta): x = -p$.
- 6. Λάθος :** Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δυο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και $M(x, y)$ το μέσο του τμήματος AB τότε ισχύουν οι σχέσεις: $x = \frac{x_2 - x_1}{2}$ και $y = \frac{y_2 - y_1}{2}$

(Μονάδες 6X2=12)

ΘΕΜΑ 2^ο

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν μέτρα $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και σχηματίζουν γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

Να υπολογίσετε:

- α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ (μονάδες 6)
- β) τα μέτρα $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$, $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ (μονάδες 8)
- γ) το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ (μονάδες 6)
- δ) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. (μονάδες 5)

Απάντηση

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συν} \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

β) $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 2^2 - 2 \cdot 1 + 1^2 = 3.$

Άρα $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{3}.$

Ομοίως $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2 = 7$

Άρα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{7}.$

γ) $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 2^2 - 1^2 = 3$

δ) Έστω $\hat{\varphi}$ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Ισχύει:

$$\text{συν} \hat{\varphi} = \frac{(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \cdot |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|} = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7} \text{ ή } \sqrt{\frac{3}{7}}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται τα σημεία A(1,2) και B(3,4) να βρείτε :

- α) την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα παραπάνω σημεία. (μονάδες 6)
- β) τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB (μονάδες 4)
- γ) την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από το παραπάνω σημείο M και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-2,1)$ (μονάδες 8)
- δ) την απόσταση του σημείου B από την ευθεία (ζ) . (μονάδες 7)

Απάντηση

α) (ε): $y - 2 = \frac{4-2}{3-1}(x-1) \Leftrightarrow y = x + 1$

β) Είναι $x = \frac{1+3}{2} = 2$ και $y = \frac{2+4}{2} = 3$ Άρα M(2,3).

γ) (ζ): $y - 3 = \frac{1}{-2}(x-2) \Leftrightarrow x + 2y - 8 = 0$

δ) $d(B,\zeta) = \frac{|3+2 \cdot 4-8|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι κύκλοι: $(c_1): x^2 + y^2 = 2$ και $(c_2): x^2 + y^2 - 6x - 10y + 50 - t = 0$,
 $t \in \mathbb{R}$. Να βρείτε :

- α) Τις τιμές του t . (μονάδες 8)
- β) Το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου (c_2) . (μονάδες 6)
- γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου (c_1) στο σημείο του $A(1,1)$. (μονάδες 4)
- δ) Την τιμή του $t \in \mathbb{R}$ ώστε ο κύκλος (c_2) να εφάπτεται στην ευθεία (ε) , του προηγούμενου ερωτήματος. (μονάδες 7)

Απάντηση

- α) $(c_2): x^2 + y^2 - 6x - 10y + 50 - t = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 = t-16$ Άρα
 $t-16 > 0 \Leftrightarrow t > 16$
- β) Το κέντρο του κύκλου (c_2) είναι το σημείο $K(3,4)$ και η ακτίνα του είναι:
 $\rho = \sqrt{t-16}$
- γ) η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου (c_1) στο σημείο του $A(1,1)$ είναι :
 $(\varepsilon): x \cdot 1 + y \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$.
- δ) Για να εφάπτεται ο κύκλος (c_2) στην ευθεία (ε) , πρέπει η απόσταση του κέντρου του $K(3,4)$ από την (ε) να ισούται με την ακτίνα του. Δηλαδή: $d(K,\varepsilon) = \sqrt{t-16} \Leftrightarrow$
 $\frac{|3+5-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{t-16} \Leftrightarrow 6 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{t-16} \Leftrightarrow t-16 = 18 \Leftrightarrow t = 34$.

Οι καθηγητές:

Ο Διευθυντής

1.

2.

Οδηγίες:

1. Να απαντήσετε και στα τέσσερα (4) θέματα.
2. Να μην αντιγράψετε. τις εκφωνήσεις των θεμάτων στην κόλλα απαντήσεων.
3. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ