

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Μονάδες 4

A2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8,5

B1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0 .

β. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

γ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

Μονάδες 4,5

B2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0 .

Στήλη A συναρτήσεις	Στήλη B εφαπτόμενες
α. $f(x)=3x^3, \quad x_0=1$	1. $y=-2x+\pi$
β. $f(x)=\eta\mu 2x, \quad x_0=\frac{\pi}{2}$	2. $y=\frac{1}{4}x+1$
γ. $f(x)=3 x , \quad x_0=0$	3. $y=9x-6$
δ. $f(x)=\sqrt{x}, \quad x_0=4$	4. $y=-9x+5$
	5. δεν υπάρχει

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\frac{2z+i}{\bar{z}-2i}, z \in \mathbb{C}$ με $z \neq -2i$, όπου \bar{z} ο συζυγής του z .

α. Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$$w_1 = f(9-5i)$$

Μονάδες 6

$$w_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i) \right]^{2004}$$

Μονάδες 6

β. Θεωρούμε τον πίνακα $M = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} |w_1| & 0 \\ 0 & -|w_1| \end{bmatrix}$ όπου $|w_1|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού w_1 του ερωτήματος α.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός T με πίνακα M είναι:

A. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων O και γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$

B. συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$

Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$

Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία $y=x$

E. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων O και λόγο $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Μονάδες 5

γ. Αν M ο πίνακας του ερωτήματος β, τότε να βρεθεί ο πίνακας X ώστε να ισχύει: $MX=K$, όπου K είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων O και γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$, να δείξετε ότι:

α. η ευθεία $y=3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

Μονάδες 7

β. υπάρχει $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = \frac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$$

Μονάδες 12

γ. υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Τη χρονική στιγμή $t=0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{at}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, t \geq 0$$

όπου a και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών a και β .

Μονάδες 15

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.

Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης : μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!