

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.

α) Πότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται γραμμικός;
Μονάδες 2,5

β) Αν $M(x,y)$ σημείο του επιπέδου, $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ δεδομένο διάνυσμα και $M'(x',y')$ η εικόνα του M στην παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα \vec{u} , να βρείτε τα x',y' συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου M και του διανύσματος \vec{u} .
Μονάδες 5

γ) Είναι η παράλληλη μεταφορά γραμμικός μετασχηματισμός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
Μονάδες 5

B1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το μετασχηματισμό της στήλης I και δίπλα τον αριθμό της στήλης II που αντιστοιχεί στον πίνακα του μετασχηματισμού.

Στήλη I	Στήλη II
T_1 : «συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$ »	1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
T_2 : «στροφή κατά γωνία $\pi/2$ »	2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Μονάδες 3

B2. Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό T με πίνακα $A = A_1A_2 - A_2A_1$, όπου A_1, A_2 οι πίνακες των μετασχηματισμών T_1, T_2 αντιστοίχως, του ερωτήματος B1.

α) Να δείξετε ότι ο T είναι κανονικός μετασχηματισμός.
Μονάδες 4,5

β) Να βρείτε την εικόνα της ευθείας $\varepsilon: 2x - y + 5 = 0$ μέσω του μετασχηματισμού T .
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

A. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{5+i}{2+3i}$

α) Να γράψετε τον z στη μορφή $a + \beta i$, $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

β) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή.

Μονάδες 5

Στις ερωτήσεις γ), δ) να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό του θέματος και της κάθε ερώτησης και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

γ) Αν $\theta = \text{Arg}z$, τότε ο μιγαδικός αριθμός iz έχει όρισμα:

A. $\frac{\pi}{4} - \theta$ B. $\frac{\pi}{2} + \theta$ Γ. $\theta - \frac{\pi}{2}$ Δ. $\pi + \theta$

Μονάδες 3

δ) Το z^4 είναι ίσο με:

A. 4 B. $4i$ Γ. $-4i$ Δ. -4

Μονάδες 3

B. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει:

$$\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 .$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1) e^{5-x} & , x \geq 5 \end{cases}$$

A. Να βρεθούν τα, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$.

Μονάδες 6

B. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Μονάδες 10

Γ. Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος B να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς

μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ είναι $\frac{8}{t+1} - 2$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$.

Μονάδες 6

β) Σε ποια χρονική στιγμή t , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

Μονάδες 6

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$ η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2,4$).

Μονάδες 13

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!