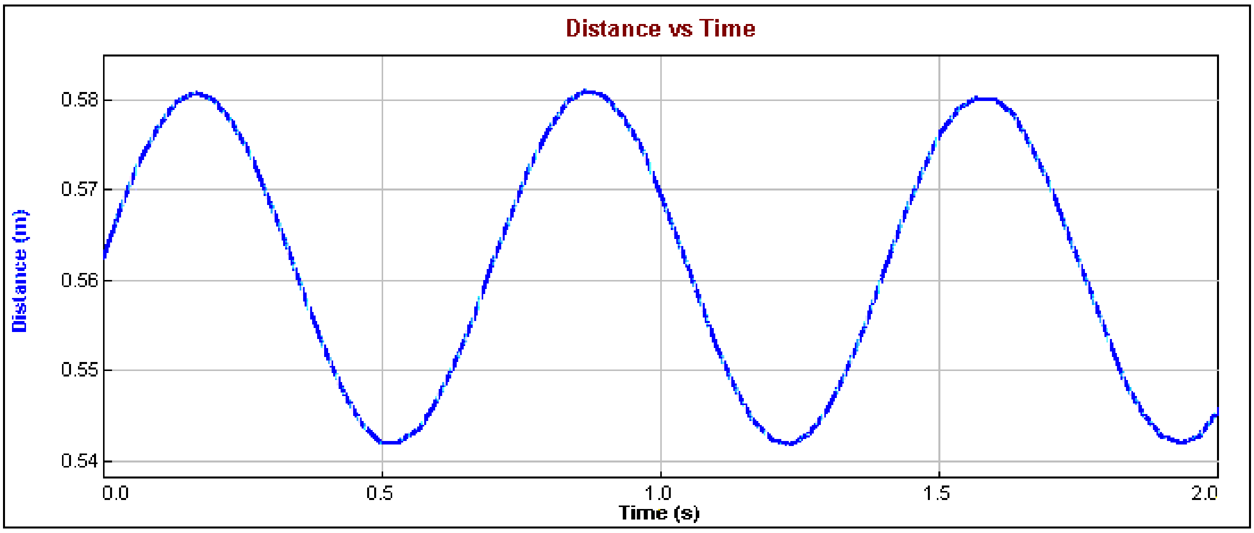
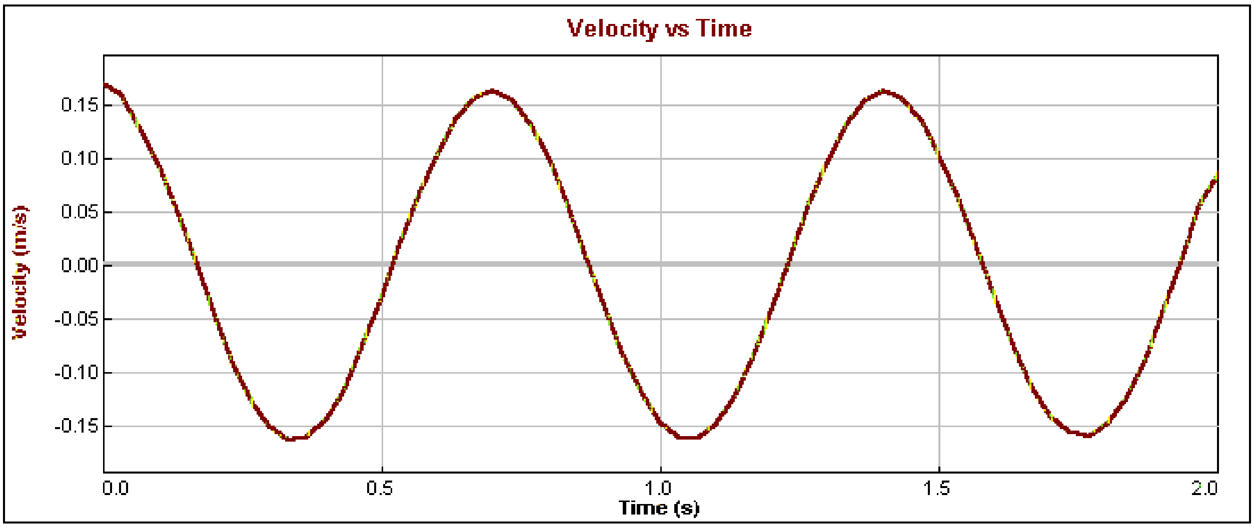
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ



ΘΕΜΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ: **Χρήση αισθητήρων σε πειράματα φυσικής**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: **Χρήστος Τρικαλινός**

ΕΠΙΜΟΡΦΟΥΜΕΝΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ: **Καλαϊτζάκης Παρασκευάς**
Βαλάσης Καμαρινός
Γεώργιος Φιτσιάλης



ΙΟΥΛΙΟΣ 2001

Περιεχόμενα

Αντί προλόγου........

Η Φυσική, η επιστήμη που εξετάζει τα φυσικά φαινόμενα, πρέπει να διδάσκεται, στα πλαίσια της μέσης αλλά και της ανώτατης εκπαίδευσης, κατεξοχήν με το πείραμα. Πείραμα είναι η ελεγχόμενη επανάληψη ή η εξομοίωση ενός φυσικού φαινομένου στο εργαστήριο ή στην αίθουσα.

Στον πίνακα μελετάμε φυσικά φαινόμενα κάνοντας συχνά επίκληση της εμπειρίας του μαθητή ή φοιτητή ανάλογα ή απαιτούμε να διαθέτει πλούσια φαντασία για να μπορεί να συμμετάσχει στην επεξεργασία με τη χρήση των μαθηματικών. Αυτό όμως εμπεριέχει πολλούς κινδύνους. Συχνά για παράδειγμα, η εμπειρία είναι ανασταλτικός παράγοντας και πολλές φορές υπαγορεύει λανθασμένα συμπεράσματα ή έχει αποκρυσταλλωθεί σε λανθασμένη γνώση που πρέπει να αντικατασταθεί με τη σωστή. Η φαντασία πάλι είναι εντελώς υποκειμενική και ποτέ δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι μιλάμε για το ίδιο πράγμα. Έτσι είναι απαραίτητη η προσέγγιση των φαινομένων και των εννοιών μέσα από το πείραμα.

Στην καθημερινή ζωή χρησιμοποιούμε μία μεγάλη ποικιλία από συσκευές και μηχανές που οι αρχές λειτουργίας τους αφορούν άμεσα τη φυσική. Ένα πείραμα φέρνει πιο κοντά την καθημερινή ζωή και την επιστήμη. Εισάγει με ορθολογικό τρόπο τους διδασκόμενους στη χρήση των επιτευγμάτων της τεχνολογίας και δίνει την ευκαιρία στην κατανόηση των προβλημάτων που απορρέουν από την ολοένα και με πιο γρήγορους ρυθμούς ανάπτυξή της.

Το πείραμα σαν σύλληψη, υλοποίηση και εκτέλεση, δίνει την ευκαιρία να αναδειχτούν ικανότητες και δεξιότητες που με τη συμβατική διδασκαλία του μαυροπίνακα, παραμένουν αθέατες. Απαιτεί συστηματική παρατήρηση, επεξεργασία των μετρήσεων και εξαγωγή συμπερασμάτων. Βοηθά στην εμπέδωση της θεωρίας

Είναι σε μικρογραφία μία πλήρης επιστημονική μελέτη, μέθοδος που χρησιμοποιεί ατράνταχτα επιχειρήματα για να πείσει.......

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Εισαγωγή

Πρόκειται για κλασσική εργαστηριακή άσκηση που γίνεται στα εργαστήρια φυσικής των πρωτοετών φοιτητών αλλά και σε πολλά σχολεία. Η διαφορά από τα άλλα πειράματα είναι ότι χρησιμοποιείται ο υπολογιστής στη διάταξη του πειράματος για τον έλεγχο και την διεξαγωγή του πειράματος. Πιο συγκεκριμένα οι πειραματικές τιμές της μετατόπισης και του χρόνου, που είναι οι δύο κύριες παράμετροι του πειράματος, εισάγονται κατευθείαν στον υπολογιστή μέσω κατάλληλης σύνδεσης. Η μέτρηση της μετατόπισης γίνεται με τη βοήθεια αισθητήρα και η δεύτερη από το ρολόι του ίδιου του υπολογιστή(Με χρήση του κατάλληλου λογισμικού).

Η άσκηση είναι σχεδιασμένη έτσι, ώστε να μπορεί να εκτελεστεί και με τον κλασσικό μηχανικό τρόπο.

Σε κάθε άσκηση , ακολουθείται η ακόλουθη δομή:

1.Απαιτούμενος εξοπλισμός.

2.Σκοπός.

3.Στοιχεία θεωρίας.

4.Διαδικασία – Μετρήσεις.(Αναφορά στο πρόγραμμα εκτέλεσης της άσκησης.)

5.Υπολογισμοί.

6.Ερωτήσεις.

Να σημειωθεί ότι δεν έγινε προσδιορισμός των σφαλμάτων κατά την διαδικασία των υπολογισμών μετά από τις μετρήσεις.

Στη συνέχεια υπάρχουν οδηγίες για την χρήση του Logger Pro και επιπλέον στοιχεία θεωρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΗΣ ΤΟΥ LOGGER PRO

Ανίχνευση κίνησης με το Logger pro

Εισαγωγή

Αυτή η εισαγωγή θα σας οδηγήσει να κάνετε απλές μετρήσεις με τη χρήση του ανιχνευτή κίνησης και του Logger Pro. Πιθανόν να μην χρειαστεί ποτέ να μάθετε περισσότερα για το Logger Pro και τον ανιχνευτή κίνησης, αλλά προχωρημένοι χρήστες θα θέλουν να διερευνήσουν τα μενού και να κάνουν την καλύτερη δυνατή χρήση των δυνατοτήτων του Logger Pro.

Στήσιμο εξοπλισμού

Αρχικά επιβεβαιώστε ότι έχετε όλον τον εξοπλισμό και το software που απαιτείται. Θα πρέπει να έχετε:

- **Macintosh ή PC με Windows.**
- **To software Logger Pro.**
- **Universal Lab Interface (ULI) με τροφοδοσία 9V και καλώδια σειριακής επικοινωνίας.**
- **Ανιχνευτή κίνησης συνδεμένο στο Port2 του ULI.**
- **Μετροταινία.**

Ανιχνευτής κίνησης

Ο ανιχνευτής κίνησης χρησιμοποιείται για να μετρήσει την απόσταση του από το αντικείμενο-στόχο. Εκπέμπει υπέρηχους και ανιχνεύει την ηχώ από τον στόχο. Το χρησιμοποιήσιμο εύρος του ανιχνευτή κίνησης είναι περίπου από 0,4 έως 6m.

ULI

Το ULI είναι είδος επικοινωνίας που μετατρέπει τα σήματα από τον ανιχνευτή κίνησης σε μια μορφή που ο υπολογιστής μπορεί να διαβάσει. Τροφοδοτήστε (ανοίξτε) το ULI και σιγουρευτείτε ότι το πράσινο φως ανάβει. Συνδέστε τον ανιχνευτή κίνησης με το Port 2.

Logger Pro

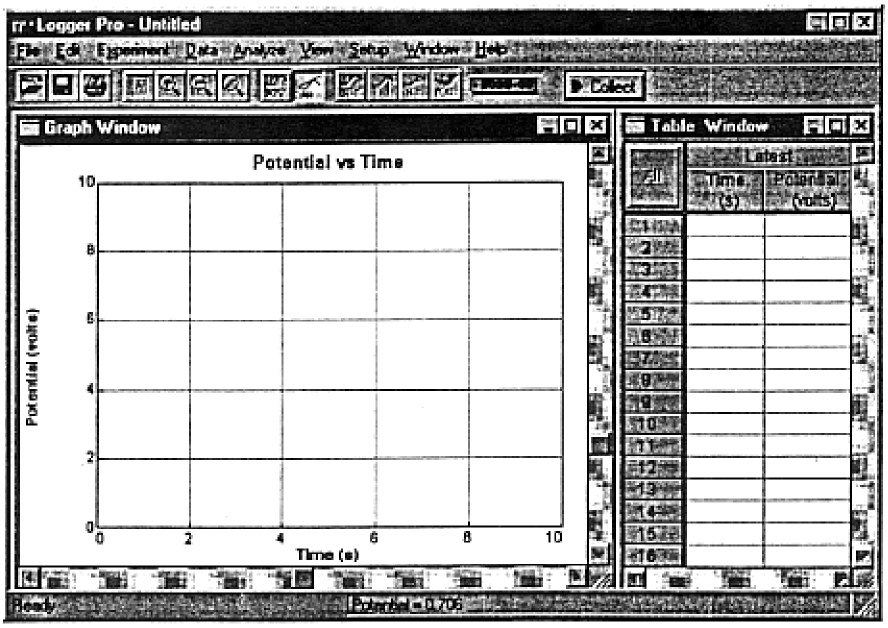
Το Logger Pro είναι software που ελέγχει το ULI και μας δίνει τα αποτελέσματα των μετρήσεων του ανιχνευτή κίνησης. Πολλές από τις οδηγίες που ακολουθούν θα σας διδάξουν να εργάζεστε με το Logger Pro.

Στήσιμο του ανιχνευτή κίνησης

Τοποθετήστε τον ανιχνευτή κίνησης στο επίπεδο εργασίας με το χρυσό δίσκο να δείχνει προς τα πάνω. Βεβαιωθείτε ότι δεν υπάρχουν εμπόδια από τον ανιχνευτή κίνησης(όχι βέβαια το ταβάνι) ή πιο κοντά από 0,5m. (Σύντομα θα χρησιμοποιήσετε τα χέρια σας σαν κινούμενο στόχο για τον ανιχνευτή κίνησης).

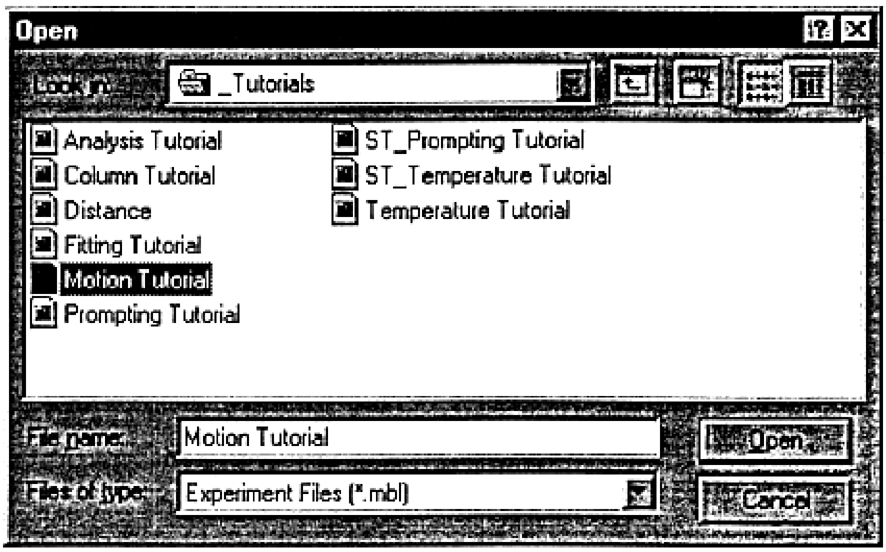
Έναρξη του Logger pro

Με χρήση της κατάλληλης μεθόδου για τον υπολογιστή σας ξεκινήστε την εφαρμογή του Logger pro.Θα πρέπει να δείτε μια οθόνη όπως η παρακάτω. Αν όχι, τότε το Logger pro έχει πρόβλημα επικοινωνίας με το ULI. Βεβαιωθείτε ότι το ULI έχει ανοίξει και υπάρχει τροφοδοσία και ότι το σειριακό καλώδιο συνδέεται και στα δύο άκρα του (υπολογιστής και ULI). Προσπαθήστε να ξεκινήσετε πάλι.

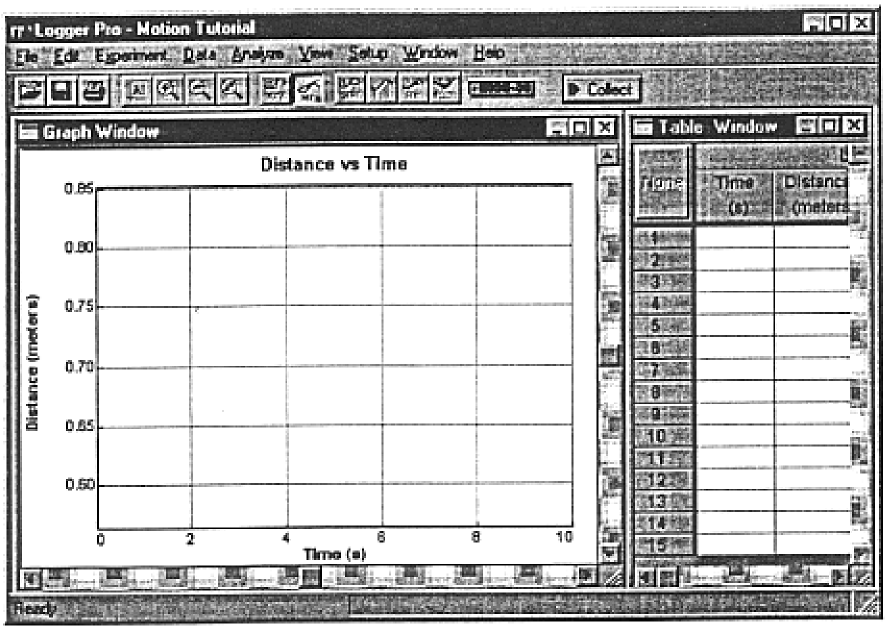


Άνοιγμα(έναρξη) πειράματος

- **Επιλέξτε Open από το μενού File.**
- **Στη λίστα που εμφανίζεται επιλέξτε Motion Tutorial από το οδηγό - φάκελο Tutorials και κάντε κλικ στο Open.**



Με το άνοιγμα αυτού του οδηγού -φακέλου φορτώνεται μια ειδική (συγκεκριμένη) διαμόρφωση του Logger Pro, έτσι ώστε αυτό να είναι έτοιμο να πάρει δεδομένα με τον ανιχνευτή κίνησης.



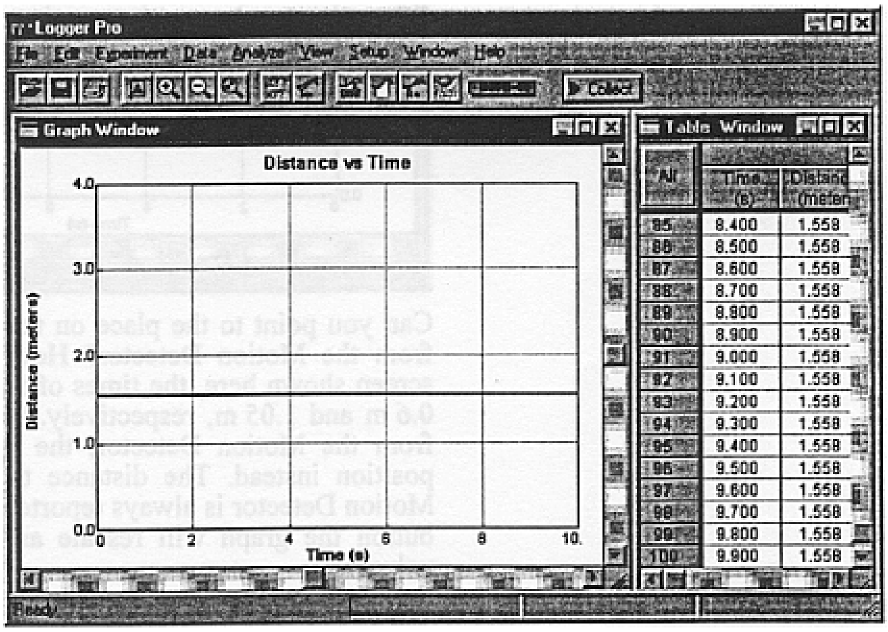
Η οθόνη του Logger Pro περιέχει από πάνω προς τα κάτω τα ακόλουθα κύρια στοιχεία: τη γραμμή -μενού, τη γραμμή εργαλείων (εργαλειοθήκη) που περιέχει ένα κουμπί συλλογής μετρήσεων, παράθυρα γραφήματος και δεδομένων και μία γραμμή κατάστασης.

Έναρξη συλλογής δεδομένων

Για την πρώτη σας μέτρηση με χρήση του Logger Pro και του ανιχνευτή κίνησης, μετρήστε περίπου πόσο ψηλά είναι η οροφή από εσάς.

❖ Κάντε κλικ στο κουμπί Collect.

Πιθανόν να ακούσετε ένα ήχο-κλικ από τον ανιχνευτή κίνησης, αυτό είναι φυσιολογικό για τον μετρητή. Παρατηρήστε το γράφημα που εμφανίζεται. Το Logger Pro θα πάρει μετρήσεις για 10 sec. Πιθανόν να χρειαστεί να κάνετε κλικ στο κουμπί Autoscale για να έρθει η γραμμή του γραφήματος σε πιο καλή οπτική θέση.



Στην περίπτωση αυτή θα δείτε ότι η οροφή είναι περίπου 1,5m πάνω από τον ανιχνευτή κίνησης και ότι αυτή δεν μετακινείται. Στο γράφημα σας, ο κατακόρυφος άξονας είναι η απόσταση και ο οριζόντιος άξονας ο χρόνος.

- **Να ελέγξετε ότι η απόσταση στην οποία αναφερόμαστε δίνει σήμα και να επιβεβαιώσετε με την μετροταινία, τη μέτρηση.**

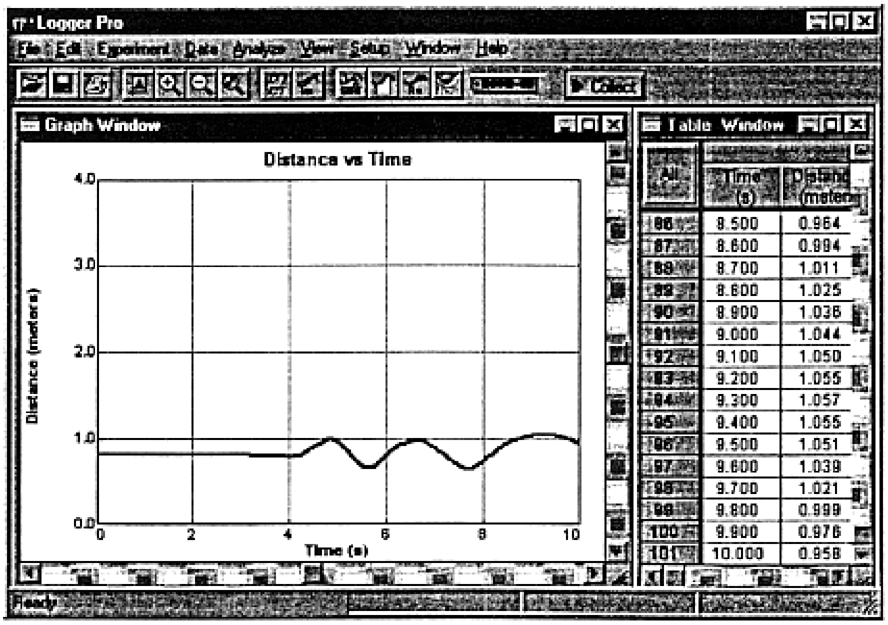
Αν η μέτρηση του ανιχνευτή κίνησης έχει θόρυβο ή είναι εμφανώς λάθος, τότε υπάρχει άλλο αντικείμενο στο δρόμο του ανιχνευτή κίνησης. Είναι πιθανόν ο ανιχνευτής κίνησης να δώσει την απόσταση ενός φωτεινού ειδώλου, γι' αυτό δοκιμάστε διάφορες θέσεις στο τραπέζι του πειράματος. Το γράφημα επεκτείνεται προς τα δεξιά σε πραγματικό χρόνο, όσο συσσωρεύονται δεδομένα μετρήσεων. Η συλλογή δεδομένων θα σταματήσει όταν φτάσει το γράφημα στο δεξιό του μέρος ή πιο γρήγορα αν κάνετε κλικ στο κουμπί stop.

- **Κρατείστε το χέρι σας σταθερό περίπου 1 m πάνω από τον ανιχνευτή κίνησης και κάντε κλικ στο collect.**

Τα δεδομένα που πήραμε για την οροφή θα εξαφανιστούν και θα εμφανιστούν αυτά για τη θέση του χεριού.

- **Πριν τελειώσει η συλλογή των δεδομένων, κινήστε λίγο το χέρι σας πάνω-κάτω για να δείτε την απόκριση του γραφήματος. Μην πλησιάσετε τον ανιχνευτή πιο κοντά από 40cm.**

(Αν η απόσταση γίνει μικρότερη των 40cm, το αποτέλεσμα πιθανόν να είναι λάθος. Πειραματικά μπορείτε να βρείτε την απόσταση πέραν της οποίας θα έχετε χρήσιμα δεδομένα).



Μπορείτε να δείξετε τη θέση του γραφήματος στην οποία το χέρι σας βρίσκεται στην πιο μεγάλη απόσταση από τον ανιχνευτή κίνηση; Στην πιο μικρή; Στο παράδειγμα της οι θέσεις είναι 1,05m και 0,6m αντίστοιχα. Σημειώστε ότι αν απομακρύνετε το χέρι σας από τον ανιχνευτή θα αποθηκεύσει τη θέση της οροφή. Η απόκριση του ανιχνευτή γίνεται πάντα για το πλησιέστερο αντικείμενο που βρίσκετε μπροστά του. Αν κάνετε κλικ στο Autoscale το γράφημα θα αναδιαμορφωθεί και θα είναι πιο εύκολο να διαβάσουμε τις τιμές.

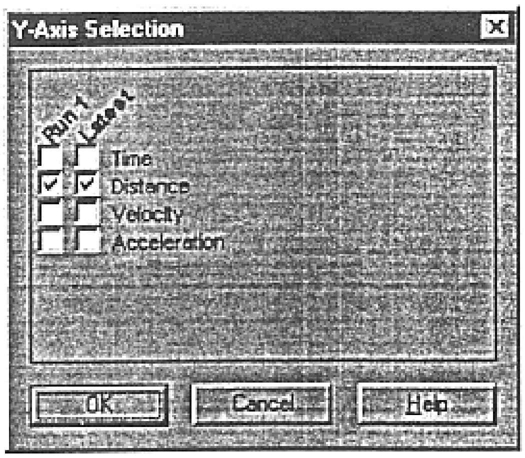
Αποθήκευση μετρήσεων

Όταν τρέξετε ένα χρήσιμο πείραμα, θέλετε συχνά να το διατηρήσετε για να συγκρίνετε με τα πειράματα που θα τρέξετε στη συνέχεια. Για να αποθηκεύσετε το τελευταίο πείραμα, διαλέξτε Store Latest Run από το μενού Data. Αυτά τα δεδομένα θα είναι αποθηκευμένα όταν συλλέξετε επιπρόσθετα δεδομένα. Η αποθήκευση αυτή, πάντως, δεν σώζει τα δεδομένα στο σκληρό δίσκο ή σε μια δισκέτα. Αν βγείτε από το Logger Pro χωρίς να έχετε σώσει τα δεδομένα, αυτά θα χαθούν.

❖ Αποθηκεύστε την τελευταία συλλογή μετρήσεων του πειράματος με επιλογή Store Latest Run από το μενού Data. Να πάρετε μια ακόμη σειρά μετρήσεων της κίνησης του χεριού σας και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα με αυτά του προηγούμενου τρεξίματος. Μπορείτε με ακρίβεια να επαναλάβετε την αποθηκευμένη κίνηση;. Είναι δύσκολο!

Εμφάνιση ταχύτητας και επιτάχυνσης

Το Logger Pro μπορεί επίσης να εμφανίσει την ταχύτητα και την επιτάχυνση του ανιχνευόμενου αντικειμένου. Κάντε κλικ στον y-axis και θα έχετε τον διάλογο:



Για να εμφανίσετε τα γραφήματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, σημειώστε τους αντίστοιχους όρους στη λίστα και κάντε κλικ στο ΟΚ. Είναι εύκολο να κάνετε ένα συνδυασμό και δύσκολο να διαβάσετε το αντίστοιχο γράφημα, γι' αυτό να μην επιλέξετε σειρές μετρήσεων ή μεταβλητές που δεν θέλετε να δείτε.

Μερικές υποδείξεις(σημειώσεις) για τη χρήση του ανιχνευτή κίνησης.

- Στη χρήση του ανιχνευτή κίνησης, είναι σημαντικό να γνωρίζετε ότι ο υπέρηχος εκπέμπεται μέσα σε κώνο πλάτους 30^o. Οτιδήποτε μέσα στον κώνο του υπέρηχου μπορεί να προκαλέσει ανάκλαση και πιθανόν μια ανεπιτυχή μέτρηση. Ένα κοινό πρόβλημα στη χρήση του ανιχνευτή κίνησης είναι οι ανεπιθύμητες ανακλάσεις από την έδρα, τις καρέκλες ή τον υπολογιστή που βρίσκεται μέσα στην αίθουσα.
- Ο ανιχνευτής κίνησης δεν αντιλαμβάνεται σωστά τα αντικείμενα αν αυτά βρίσκονται πιο κοντά από 0,4m. Το μέγιστο εύρος είναι περίπου 6m, αλλά η ανίχνευση λεπτών αντικειμένων στο κώνο του υπερήχου μπορεί να είναι προβληματική σ' αυτή την απόσταση.
- Αν ξεκινήσετε με τα γραφήματα ταχύτητας ή επιτάχυνσης και αυτά είναι ασαφή , γυρίστε στο γράφημα της απόστασης και παρατηρήστε το . Μπορεί ο ανιχνευτής κίνησης να μην εντοπίζει κατάλληλα το στόχο.
- Πολλές φορές ο στόχος-αντικείμενο μπορεί να μην δώσει ισχυρή ανάκλαση του υπερήχου. Για παράδειγμα, αν ο στόχος είναι ένα άνθρωπος που φοράει μια ογκώδη μπλούζα το αποτέλεσμα -γράφημα πιθανόν να είναι ασαφές.
- Αν τα γραφήματα ταχύτητας και επιτάχυνσης έχουν θόρυβο, προσπαθήστε να αυξήσετε τη δύναμη (ισχύ) της ανάκλασης του υπέρηχου από το αντικείμενο-στόχο με αύξηση του εμβαδού του στόχου.

Έξοδος από το Logger Pro.

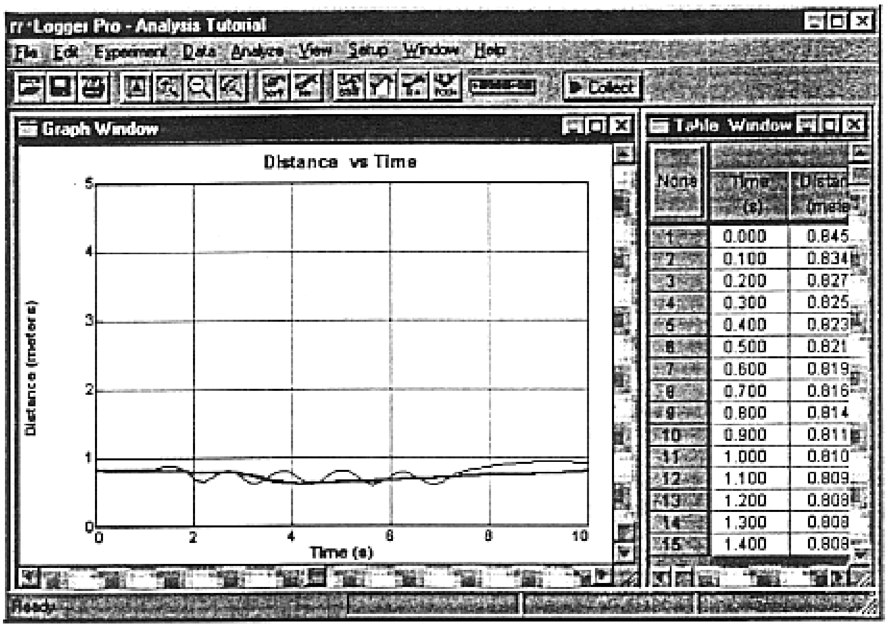
Γνωρίζετε τώρα να συλλέγεται δεδομένα κίνησης με χρήση το ανιχνευτή κίνησης και του Logger Pro. Άλλες πληροφορίες θα σας δοθούν για το πώς να αναλύετε τα δεδομένα, να προσαρμόζετε καμπύλες στα δεδομένα, να σώζετε και να τυπώνετε τα δεδομένα σας και τέλος να προσδιορίζετε νέες στήλες δεδομένων. Βγείτε από το Logger Pro με επιλογή Quit ή Exit από το μενού File. Μη σώσετε οποιαδήποτε αλλαγή.

Ανάλυση δεδομένων

Όταν έχετε συλλέξει δεδομένα με το Logger Pro, υπάρχει ένας αριθμός ενεργειών που μπορείτε να κάνετε με αυτά τα δεδομένα για να τα κατανοήσετε αυτά. Στη συνέχεια θα μάθετε πώς να χρησιμοποιείτε κάποιες από τις δυνατότητες ανάλυσης του Logger Pro.

- ❖ Ξεκινάτε το Logger Pro.
- ❖ Επιλέξτε open από το μενού File.
- ❖ Επιλέξτε το φάκελο Analysis Tutorial από τον οδηγό- φάκελο Tutorials και κάντε κλικ στο Open.

1. Ας θεωρήσουμε ότι έχετε μόλις φορτώσει ένα δείγμα δεδομένων για να χρησιμοποιηθούν σ’ αυτό το εισαγωγικό σημείωμα.
2.



3.
4.
5. **Αλλαγή γραφήματος**

Υπάρχει ένας αριθμός χρήσιμων τρόπων για να εμφανίσουμε τα δεδομένα που μάζεψε το Logger Pro. Πιθανόν να θέλετε απλά να αλλάξετε τα όρια στο y-άξονα για να μελετήσετε μέρος των δεδομένων. Ή, πιθανόν να θέλετε να

προσθέσετε ένα περιγραφικό τίτλο στο γράφημα. Μπορείτε να τα κάνετε και τα δυο, αν κάνετε κλικ σε διάφορα μέρη της οθόνης. Πρώτα, δοκιμάστε να αλλάξετε τα όρια του y-άξονα. Οι αριθμοί σε οποιοδήποτε άκρο του άξονα μπορούν να εμφανιστούν.

- **Κάντε κλικ στο 5 στο πάνω άκρο του y-άξονα. Ο αριθμός θα αναβοσβήνει.**
- **Τυπώστε το 3 για να αντικαταστήσει το 5 και πιέστε το enter. Το γράφημα θα έχει αλλαγή στην κλίμακα του y. Μπορείτε ν' αλλάξετε τον άξονα χ με τον ίδιο τρόπο. Το ίδιο μπορεί να γίνει αν καλέσετε το Logger Pro να αλλάξει τις κλίμακες των αξόνων αυτόματα.**
- **Επιλέξτε Autoscale από το μενού View ή κάντε κλικ στο κουμπί Autoscale στην γραμμή εργαλείων. Το γράφημα τώρα δείχνει όλη την περιοχή των δεδομένων.**

Αλλαγή στον τίτλο του γραφήματος

Μπορείτε ν' αλλάξετε τον τίτλο του γραφήματος.

- **Κάντε κλικ στον τίτλο του γραφήματος.**
- **Τυπώστε ένα καινούριο τίτλο της επιλογής σας και κάντε κλικ στο OK. Ο τίτλος σας είναι τώρα στη θέση του.**

Έρευνα στα δεδομένα

Πολλές φορές θέλετε να δείτε τις συντεταγμένες μιας συγκεκριμένης θέσης του γραφήματος.

- **Επιλέξτε Examine από το μενού Analyze ή κάντε κλικ στο κουμπί Examine της γραμμής εργασίας.**
- **Κινήστε τον δείκτη κατά μήκος του γραφήματος.**
- **Σημειώστε τη νέα λεζάντα που εμφανίζεται στο γράφημα. Τότε, καθώς μετακινείτε τον δείκτη στο γράφημα, θα δείτε μια αριθμητική έξοδο που αλλάζει και που αναφέρεται στις συντεταγμένες κάθε ποσότητας του γραφήματος στο χρόνο που αναφερόμαστε.**

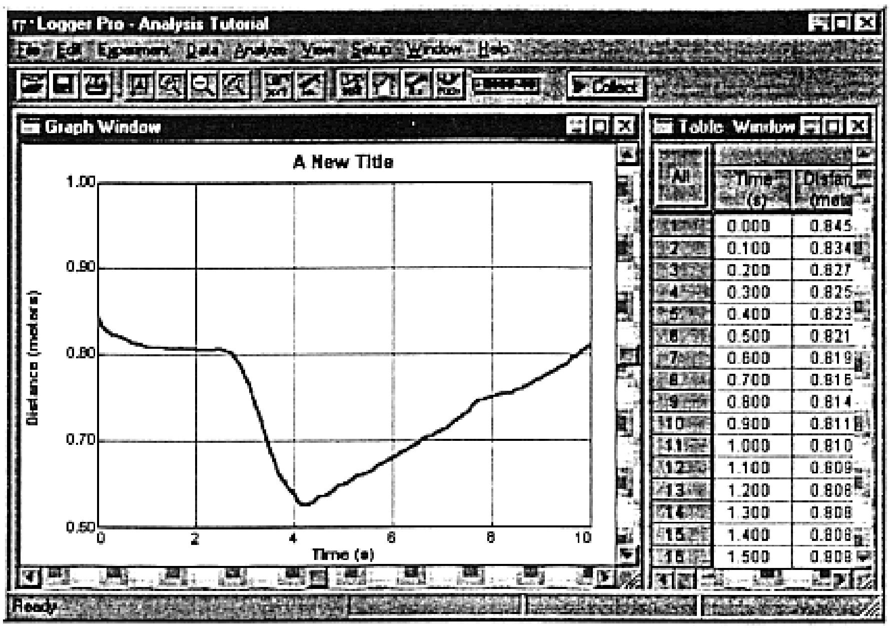
Παράθυρο πίνακα δεδομένων

Καθώς ο δείκτης διαγράφει το γράφημα ο πίνακας των δεδομένων αλλάζει με τον αντίστοιχο χρόνο. Οι στήλες δεδομένων είναι σημειωμένες έγχρωμες για να ταιριάζουν με τις γραμμές που έχουν σχεδιαστεί στα γραφήματα. Μπορείτε να κλείσετε τον πίνακα που εμφανίζει τα δεδομένα και τον κέρσορα. Επιλέξτε πάλι Examine από το μενού Analyze για να κλείσετε την κατάσταση Examine. Μπορείτε επίσης να κάνετε κλικ στο κουμπί Examine για να κλείσετε την κατάσταση.

Μετακίνηση δεδομένων

❖ Για να απομακρύνετε μια ομάδα δεδομένων, μπορείτε να επιλέξετε Delete Run από το μενού Data, Ενώ το ποντίκι δείκτης είναι πάνω από το Delete Run θα δείτε ένα κατάλογο όλων των αποθηκευμένων δεδομένων, συμπεριλαμβανομένου του τελευταίου τρεξίματος.

❖ Ακυρώστε όλα τα δεδομένα εκτός της τελευταίας σειράς μετρήσεων. Το γράφημα της οθόνης θα έχει μόνο τα πρόσφατα δεδομένα τώρα.



Αλλαγή στο γράφημα

Οποιαδήποτε στήλη των δεδομένων από μια σειρά μετρήσεων ενός πειράματος μπορεί να σχεδιαστεί σε συνδυασμό με οποιαδήποτε άλλη στήλη. Για παράδειγμα, πιθανόν να θέλετε να σχεδιάσετε την ταχύτητα σαν συνάρτηση της θέσης σε κάποια θέματα. Για να το κάνετε αυτό, πρέπει να αλλάξετε ότι υπάρχει στον ένα ή και στους δύο άξονες.

❖ Κάντε κλικ στην ετικέτα του y-άξονα.

Θα δείτε ένα κουτί διαλόγου με όλες τις επικεφαλίδες των στηλών στα διαθέσιμα δεδομένα του πίνακα.

❖ Κάντε κλικ στα κουτιά επιλογής έτσι ώστε μόνο η στήλη ταχύτητας να σημειωθεί.

❖ Κάντε κλικ στο OK.

❖ Κάντε κλικ στην ετικέτα του X-άξονα για να ανοίξετε τον διάλογο επιλογής του X-άξονα.

❖ Κάντε κλικ στο κουμπί επιλογής απόστασης και μετά στο OK.

Θα δείτε ένα γράφημα της ταχύτητας σαν συνάρτηση της θέσης. Οι φυσικοί το αποκαλούν αυτό γράφημα φάσης.

Τώρα θα αλλάξετε το γράφημα σε αυτό που έχουμε την ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο.

- ❖ Κάντε κλικ στην ετικέτα του Χ-άξονα για να ανοίξετε το διάλογο επιλογής του Χ-άξονα.
- ❖ Κάντε κλικ στο κουμπί επιλογής Time και μετά στο ΟΚ.

Θα δείτε το γράφημα της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο.

Εφαπτόμενες γραμμές

Το Logger Pro μπορεί να σχεδιάσει εφαπτόμενες γραμμές σε οποιαδήποτε καμπύλη της οθόνης.

- ❖ Επιλέξτε Tangent από το μενού Analyze ή κάντε κλικ στο κουμπί Tangent της γραμμής εργαλείων και δείξτε σ' ένα μέρος των δεδομένων με το ποντίκι.

Το Logger Pro θα σχεδιάσει την εφαπτόμενη γραμμή στην τρέχουσα θέση του δείκτη του ποντικιού. Η κλίση της θα εμφανιστεί στο αντίστοιχο κουτί. (του υπομνήματος).

- ❖ Μετακινείστε το δείκτη για να δείτε άλλες εφαπτόμενες.
- ❖ Κλείστε την κατάσταση Tangent (εφαπτομένη) με την επιλογή Tangent πάλι από το μενού Analyze ή μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη γραμμή εργασίας.

Ολοκληρώματα

Όμοια με τη συνάρτηση εφαπτομένη, μπορείτε να ολοκληρώσετε τα δεδομένα σας.

Για να κάνετε ολοκλήρωση σε μία περιοχή:

- ❖ Επιλέξτε μία περιοχή των δεδομένων σας με τη βοήθεια του ποντικιού (το κρατάτε πατημένο κατά τη διάρκεια της επιλογής).

Δύο κατακόρυφες ράβδοι θα εμφανιστούν για να δηλώσουν την επιλεγμένη περιοχή.

- ❖ Επιλέξτε Integrate από το μενού Analyze ή κάντε κλικ στο κουμπί ολοκλήρωσης της μπάρας εργαλείων.

Το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης και του οριζόντιου άξονα θα σκιαστεί και το αριθμητικό αποτέλεσμα εμφανίζεται σ' ένα κουτί (που μπορεί να μετακινηθεί) όπως θα δείτε στην οθόνη. Μπορείτε να μετακινήσετε αυτό το κουτί σε οποιαδήποτε θέση του γραφήματος εσείς θέλετε.

Για να απομακρύνετε το ολοκλήρωμα, κάντε κλικ στην επάνω δεξιά γωνία του κουτιού με το αποτέλεσμα.

Για να ολοκληρώσετε όλα τα δεδομένα επιλέξτε ολοκλήρωμα χωρίς επιλογή περιοχής στο γράφημα της οθόνης ή του πίνακα δεδομένων.

- ❖ Απομακρύνετε το ολοκλήρωμα κάνοντας κλικ στην επάνω δεξιά γωνία του κουτιού με το αποτέλεσμα.

Στατιστική

❖ Μπορείτε επίσης με τη βοήθεια του Logger Pro να υπολογίσετε τη μέση τιμή, το μέγιστο, το ελάχιστο και την τυπική απόκλιση μέρους ή όλων των δεδομένων σας. Για να υπολογίσετε αυτά που θέλετε μέρους των δεδομένων:

❖ Επιλέξτε μία περιοχή των δεδομένων (κρατάτε το ποντίκι πατημένο κατά τη διάρκεια της επιλογής).

❖ Επιλέξτε Statistics από το μενού Analyze . Μπορείτε ισοδύναμα να πατήσετε το κουμπί Statistics της μπάρας εργαλείων. Ένα δυνάμενο να μετακινηθεί κουτί θα εμφανιστεί με τα αποτελέσματα. Για να απομακρύνετε το κουτί των αποτελεσμάτων, κάντε κλικ στην επάνω δεξιά γωνία του κουτιού. Αν θέλετε επεξεργασία όλων των δεδομένων, επιλέξτε Statistics χωρίς επιλογή περιοχής δεδομένων. Αν έχετε ήδη επιλέξει δεδομένα, ακυρώστε την επιλογή κάνοντας μία φορά κλικ στην περιοχή του γραφήματος. Οι κατακόρυφοι ράβδοι επιλογής θα εμφανιστούν. Στην συνέχεια θα σας δοθεί ο τρόπος προσαρμογής γραμμών και διαφόρων μορφών καμπύλης στα δεδομένα σας.

Έξοδος από το Logger Pro

❖ Για να εγκαταλείψετε το Logger Pro, επιλέξτε Quit ή Exit από το μενού File.Μην σώσετε οποιαδήποτε αλλαγή.

Προσαρμογή γραμμών και καμπύλων στα δεδομένα

Το Logger Pro θα προσαρμόσει μία ποικιλία συναρτήσεων στα δεδομένα σας και μετά θα παραστήσει γραφικά τη συνάρτηση και θα εκθέσει (θα μας δώσει) τα στατιστικά στοιχεία της προσαρμογής.

❖ Ξεκινήστε το Logger Pro.

❖ Επιλέξτε Open από το μενού File.

❖ Επιλέξτε το φάκελο Fitting Tutorial από τον οδηγό φάκελο Tutorials και κάντε κλικ στο Open.

Θεωρούμε ότι έχουμε φορτώσει δείγμα δεδομένων για να χρησιμοποιήσουμε στην εφαρμογή των οδηγιών.

Προσαρμογή μιας ευθείας στα δεδομένα

Συχνά τα δεδομένα δείχνουν μία γραμμική τάση και εσείς θέλετε να γνωρίζετε την κλίση αυτής της τάσης (ευθεία). Εντοπίστε το τμήμα των δεδομένων που φαίνεται να ακολουθεί λίγο ή πολύ μία ευθεία. Δεν είναι απαραίτητο να είναι ακριβώς ευθεία.

❖ Επιλέξτε αυτά τα δεδομένα με τη βοήθεια του ποντικιού (Κρατάτε το ποντίκι συνέχεια πατημένο κατά την επιλογή).

❖ Επιλέξτε Linear Fit από το μενού Analyze. Μπορείτε επίσης να κάνετε κλικ στο κουμπί Linear Fit της γραμμής εργαλείων.(Αν επιλέξετε την πιο γενική Curve Fit θα απαιτηθούν περισσότερα βήματα).

Το Logger Pro θα παραστήσει γραφικά την γραμμή με την καλύτερη προσαρμογή και θα μας δώσει τα στατιστικά αποτελέσματα προσαρμογής.

Απομάκρυνση της προσαρμογής

Για να απομακρύνετε την ευθεία προσαρμογής και τις παραμέτρους,

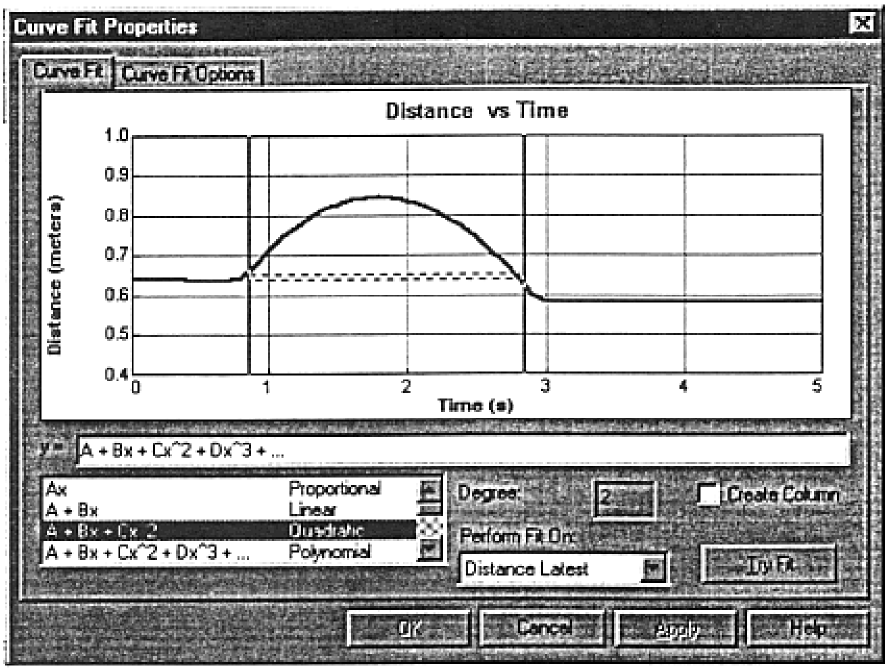
❖ κάντε κλικ στην επάνω δεξιά γωνία του κουτιού των αποτελεσμάτων.

Προσαρμογή πιο σύνθετων συναρτήσεων στα δεδομένα

Μπορείτε να προσαρμόσετε περισσότερο σύνθετες συναρτήσεις στα δεδομένα σας.

❖ Επιλέξτε την περιοχή των δεδομένων με το ποντίκι.

❖ Επιλέξτε Curve Fit από το μενού Analyze. Μπορείτε επίσης να κάνετε κλικ στο κουμπί Curve Fit της γραμμής εργαλείων. Ένα κουτί διαλόγου θα ανοίξει.



Μπορείτε να επιλέξετε την συνάρτηση που θέλετε από την κυλιόμενη λίστα που βρίσκεται κάτω αριστερά, αν κάνετε κλικ σ' αυτήν. Για το παράδειγμα που ακολουθεί:

❖ Επιλέξτε την συνάρτηση 2^{ου} βαθμού από τη λίστα Function

❖ Επιλέξτε τη στήλη Distance Latest από τη λίστα Perform Fit On.

❖ Κάντε κλικ στο κουμπί Try Fit που βρίσκεται κάτω δεξιά.

Θα δείτε μία δοκιμαστική σχεδίαση προσαρμογής (ένα προσχέδιο γραφήματος).

Μπορείτε να τροποποιήσετε την προσαρμογή όπως επιθυμείτε, με αλλαγή της περιοχής επιλογής ή της χρησιμοποιούμενης εξίσωσης και κάνοντας πάλι κλικ στο Try Fit. Όταν είστε ικανοποιημένοι με την προσαρμογή:

❖ Κάντε κλικ στο OK για να επιστρέψετε στο παράθυρο του κύριου γραφήματος.

Παρεμβολή

Μόλις παρουσιάσετε μία προσαρμογή, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτήν για να κάνετε παρεμβολή μεταξύ των σημείων των δεδομένων.

❖ Επιλέξτε Interpolate από το μενού Analyze.

❖ Μετακινείστε τον κέρσορα στην επιθυμητή περιοχή και διαβάστε τις συντεταγμένες της καμπύλης από το κουτί-υπόμνημα . Σημειώστε ότι δεν διαβάζετε τις συντεταγμένες των δεδομένων αλλά της γραμμής προσαρμογής.

❖ Κλείστε την κατάσταση παρεμβολής με επιλογή Interpolate πάλι από το μενού Analyze.

Απομάκρυνση της προσαρμογής

Όπως και πριν, μπορείτε να απομακρύνετε την προσαρμογή, αν κάνετε κλικ στο κουτί Close του κουτιού των αποτελεσμάτων.

❖ Απομακρύνετε την προσαρμογή.

Έξοδος από το Logger Pro

❖ Για να βγείτε από το Logger Pro επιλέξτε Quit ή Exit από το μενού File. Μην σώσετε οποιαδήποτε αλλαγή.

Αποθήκευση, εκτύπωση και μεταφορά δεδομένων

Μόλις έχετε στη διάθεσή σας κάποια χρήσιμα δεδομένα, πιθανόν να θέλετε να τα σώσετε σε μία δισκέτα ή στο σκληρό δίσκο για μελλοντική χρήση, να τα τυπώσετε ή να τα μεταφέρετε σε άλλη εφαρμογή. Θα δούμε στη συνέχεια πώς γίνονται αυτά.

Έστω ότι έχουμε ορισμένα δεδομένα. Για να τα χρησιμοποιήσουμε κάνουμε τα εξής:

❖ Ξεκινήστε το Logger Pro.

❖ Επιλέξτε Open από το μενού File και στη συνέχεια Fitting Tutorial από τον οδηγό-φάκελο Tutorials.

❖ Κάντε κλικ σ’ αυτό για να το επιλέξετε και κλικ στο Open.

Αποθήκευση φακέλου πειράματος

Είναι πολύ χρήσιμο να σώσουμε την τρέχουσα κατάσταση του Logger Pro σ’ ένα φάκελο. Για παράδειγμα είναι πιθανόν να διαμορφώσετε το Logger Pro για να καταφέρετε να κάνετε ένα ειδικό πείραμα. Γι’ αυτό θα πρέπει να κάνετε ρύθμιση και να πάρετε δείγμα δεδομένων. Όλη η εργασία μπορεί να

χρησιμοποιηθεί πάλι αργότερα, με άνοιγμα ενός φακέλου. Ένας τέτοιος φάκελος πειράματος περιέχει το σύνολο της Logger Pro κατάστασης. Ο αισθητήρας διαμόρφωσης περιλαμβάνει ρύθμιση (είτε από το φάκελο είτε τυπική), τη δημιουργία του γραφήματος και οποιαδήποτε δεδομένα έχουν συλλεγεί ή αποθηκευτεί.

Σαν άσκηση, θα αποθηκεύσουμε ένα αντίγραφο του φακέλου του πειράματος σε μία δισκέτα.

- **<u>Τοποθετείστε</u> μία κατάλληλα διαμορφωμένη δισκέτα στον υπολογιστή σας.**
- **<u>Επιλέξτε</u> Save As από το μενού File.**
- **Από το μενού της κορυφής του κουτιού επιλογής <u>επιλέξτε</u> Floppy disk drive.**

Θα κληθείτε να επιλέξετε ονομασία φακέλου και μία θέση για τοποθέτηση του φακέλου. Βεβαιωθείτε ότι γνωρίζετε σε ποιόν οδηγό-φάκελο θα σώσετε τον φάκελο. Αν δεν είστε σίγουρος που να τοποθετήσετε τον φάκελο, ζητείστε οδηγίες.

- **<u>Εισάγετε</u> ένα όνομα για τον φάκελο διαφορετικό από Fitting Tutorial.**
- **<u>Κάντε κλικ</u> στο OK για να αποθηκεύσετε τον φάκελό σας.**

<u>Επανάκτηση ενός φακέλου πειράματος</u>

Μετά την αποθήκευση του πειράματος στο δίσκο, μπορείτε να το επανακτήσετε με επιλογή Open από το μενού File όπως κάναμε στην αρχή των οδηγιών. Δεν είναι αναγκαίο να το κάνετε τώρα.

<u>Εκτύπωση ενός γραφήματος</u>

Όταν έχετε το γράφημα που θέλετε, μπορείτε να το εκτυπώσετε.

- **<u>Κάντε κλικ</u> στο γράφημα της οθόνης και επιλέξτε το.**
- **<u>Κάντε κλικ</u> στο εικονίδιο του εκτυπωτή στη γραμμή εργαλείων.**
- **<u>Κάντε κλικ</u> στο Print ή στο OK όπως χρειάζεται στον υπολογιστή σας.**

Το γράφημά σας θα εκτυπωθεί.

<u>Εκτύπωση δεδομένων</u>

Μπορείτε επίσης να τυπώσετε τον πίνακα των δεδομένων με επιλογή και κλικ στο εικονίδιο του εκτυπωτή, αλλά να είστε προσεκτικοί. Είναι εύκολο να αποκτήσουμε αρκετές σελίδες δεδομένων. Μπορείτε αν θέλετε να μειώσετε τον αριθμό των δεδομένων που συλλέγονται όταν αρχίζει το πείραμα. Στο μενού επιλογών μπορείτε να καθορίσετε τι θα εκτυπωθεί.

<u>Μεταφορά δεδομένων σε άλλες εφαρμογές</u>

Πιθανόν να θέλετε να αντιγράψετε δεδομένα σε φύλλο εργασίας ή πρόγραμμα γραφημάτων.

❖ Κάντε κλικ στο κουμπί All στο πάνω αριστερό σημείο του πίνακα δεδομένων για να επιλέξετε τα δεδομένα.

❖ Επιλέξτε Copy στο μενού Edit. Σύντομα θα ανοίξετε την αντίστοιχη εφαρμογή. Δεν είναι αναγκαίο να βγείτε από το Logger Pro.Στην πραγματικότητα είναι πιο εύκολο να αφήσετε σε τέτοια κατάσταση το Logger Pro, ώστε να μπορείτε να επιστρέψετε σε αυτό αργότερα.

❖ Ξεκινείστε την εφαρμογή.

❖ Καθορίστε το σημείο εισαγωγής ή το ενεργό κελί στο πάνω αριστερό σημείο της περιοχής που θέλετε να τοποθετηθούν τα δεδομένα σας.

❖ Επιλέξτε Paste από το μενού Edit.

Τα δεδομένα σας θα τοποθετηθούν στην εφαρμογή, έτοιμα για περαιτέρω ανάλυση.

Έξοδος από το Logger Pro

❖ Για να βγείτε από το Logger Pro θα επιλέξετε Quit ή Exit από το μενού File. Μη σώσετε τις αλλαγές.

❖ Εντοπίστε το φάκελο πειράματος που σώσατε προηγουμένως και ακυρώστε το (όχι το Fitting Tutorial File).

Δημιουργία νέων στηλών

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Logger Pro για να υπολογίσετε νέες στήλες δεδομένων που βασίζονται στα δεδομένα των αισθητήρων. Θα δούμε πώς δημιουργείται μία τέτοια στήλη.

❖ Ξεκινήστε το Logger Pro.

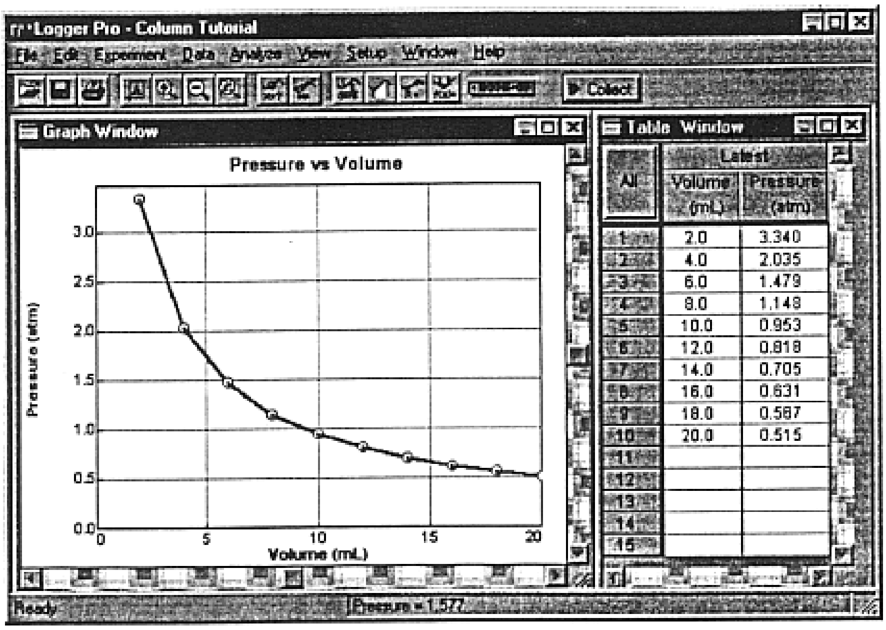
❖ Επιλέξτε Open από το μενού File.

❖ Επιλέξτε το φάκελο Column Tutorial από τον οδηγό-φάκελο Tutorials και κάντε κλικ στο Open.

Θεωρούμε ότι έχουμε δείγμα δεδομένων για χρήση στη συνέχεια.

Έρευνα στα δεδομένα

Αρχικά, δείτε την οθόνη με τον πίνακα των δεδομένων. Θα δείτε στήλες π.χ. πίεσης και όγκου. Αυτά είναι δεδομένα από πείραμα μελέτης της σχέσης μεταξύ όγκου και πίεσης ενός αερίου σε σταθερή θερμοκρασία.

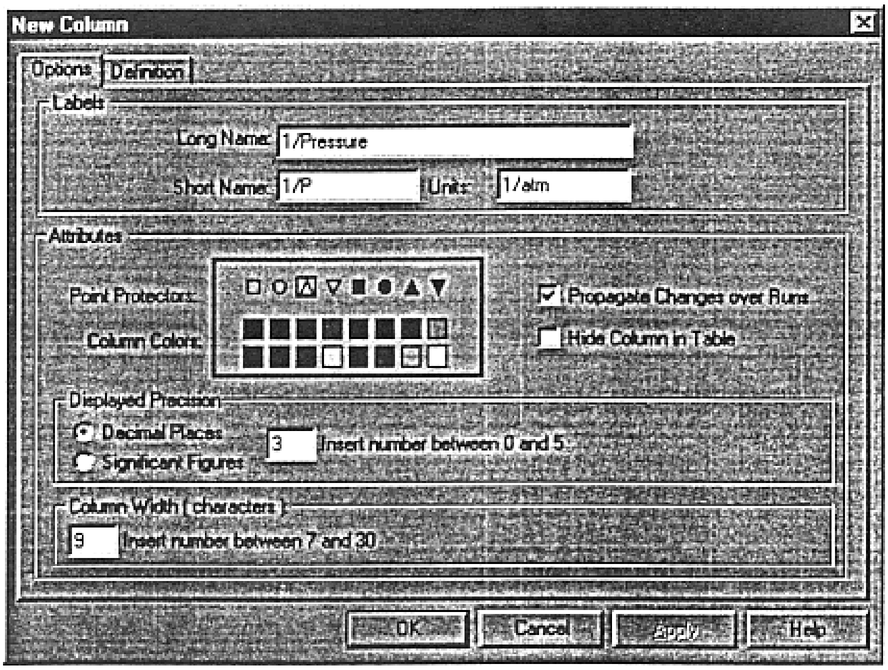


Δημιουργία νέας στήλης υπολογισμού

Ας δημιουργήσουμε μία νέα στήλη που περιέχει το αντίστροφο της στήλης της πίεσης. Για να δημιουργήσουμε τη στήλη

❖ **<u>Επιλέξτε</u> New Column→ Formula από το μενού Data.**

Θα δείτε το νέο κουτί διαλόγου. Είστε έτοιμοι να συμπληρώσετε τα πεδία των ετικετών όπως φαίνετε παρακάτω:



Αρχικά είναι αναγκαίο να ονομάσουμε τη στήλη και να προσθέσουμε μονάδες. Η ετικέτα επιτρέπει να ονομάσετε τη στήλη. Η ονομασία θα χρησιμοποιηθεί στη στήλη και στο γράφημα.

Γι' αυτό το παράδειγμα:

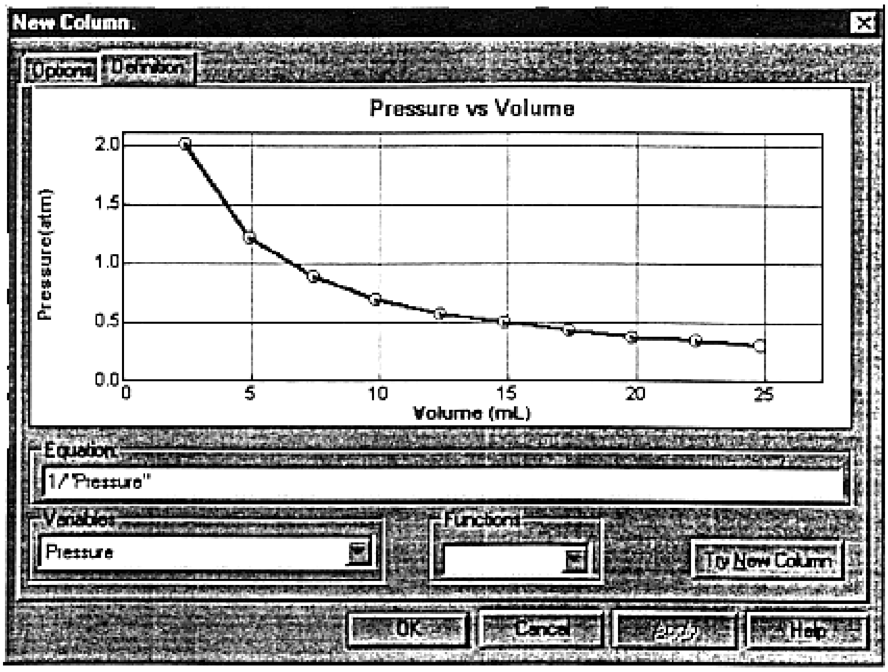
❖ Στο πεδίο Long Name εισάγουμε 1/Pressure, και 1/P στο πεδίο Short Name.

❖ Στο πεδίο Units εισάγουμε 1/atm.

❖ Επιλέξτε Point Protection και το χρώμα που θέλετε.

Στη συνέχεια ανοίξετε το δεύτερο κουτί επιλογής του κουτιού διαλόγου της νέας στήλης (Definition).

❖ Κάντε κλικ στο Definition στην επάνω αριστερά περιοχή του κουτιού διαλόγου.



Σ' αυτό το κουτί διαλόγου θα εισάγετε τον τύπο για τον υπολογισμό των περιεχομένων της νέας στήλης.

❖ Κάντε κλικ στο πεδίο Equation για να τοποθετήσετε τον κέρσορα που αναβοσβήνει εκεί.

❖ Τυπώστε 1/

❖ Επιλέξτε Pressure από την κυλιόμενη λίστα επιλογής.

Θα διαβάσετε στο πεδίο της εξίσωσης 1/"Pressure".

Αυτό σημαίνει ότι η νέα στήλη θα περιέχει το αντίστροφο της στήλης Pressure (με αντιστοιχία των γραμμών).

Υπάρχει επίσης μία λίστα μαθηματικών συναρτήσεων τέτοιων όπως log, διαθέσιμες για δημιουργία τύπων.

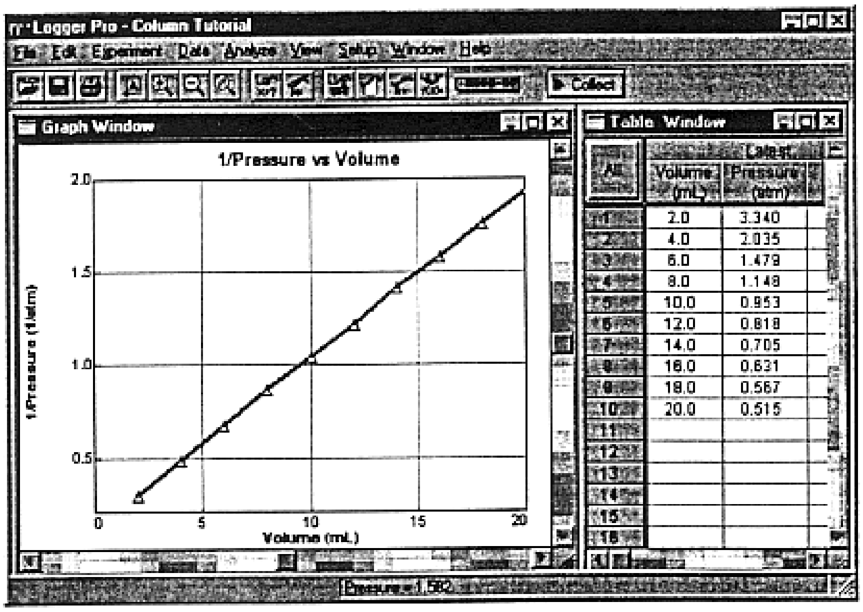
Γι' αυτό το παράδειγμα δεν χρειάζεται να την χρησιμοποιήσετε.

❖ Κάντε κλικ στο Try New Column για να δείτε το αποτέλεσμα των ενεργειών σας. Θα δείτε τη στήλη που φτιάξατε στον Y-άξονα.

Για να κάνετε δεκτή τη νέα στήλη,

❖ <u>Κάντε κλικ</u> στο OK.

Θα δείτε ένα γράφημα δεδομένων λόγω της νέας στήλης.



Σημειώστε ότι το παράθυρο δεδομένων κρατάει τη νέα στήλη όπως επίσης και τις αρχικές στήλες.

Σ' αυτό το παράδειγμα το γράφημα της 1/P σε σχέση με τον όγκο V είναι μία ευθεία που επιβεβαιώνει ότι η πίεση είναι αντιστρόφως ανάλογη του όγκου (Νόμος Boyle).

Είναι εύκολο να το δείτε με τη στήλη που φτιάξαμε, αλλά πιο δύσκολο να το συμπεράνετε από τα αρχικά δεδομένα.

Αν θέλετε να προσαρμόσετε μία ευθεία γραμμή στα νέα δεδομένα:

❖ <u>Κάντε κλικ</u> στο κουμπί Linear Fit της γραμμής εργαλείων (βλέπε και οδηγίες προηγούμενης αντίστοιχης παραγράφου).

Αν δείτε προσεκτικά το αποτέλεσμα, η προσαρμογή είναι τέτοια που δύσκολα θα δείτε τη γραμμή προσαρμογής.

<u>Έξοδος από το Logger Pro</u>

❖ <u>Βγείτε</u> από το Logger Pro με επιλογή Quit ή Exit. από το μενού File. Μη σώσετε οποιαδήποτε αλλαγή.

<u>Ρύθμιση ενός αισθητήρα</u>

Για τη δημιουργία μιας επιθυμητής νέας ρύθμισης του αισθητήρα που θα αντικαταστήσει την ήδη υπάρχουσα θα πρέπει να κάνετε τα εξής:

1. Επιλέξτε Sensors από το μενού Setup για να ανοίξει το κουτί διαλόγου Sensor Setup.
2. Κάντε κλικ στην ετικέτα Calibrate.
3. Κάντε κλικ για να ξεκινήσει η διαδικασία της ρύθμισης. Η τρέχουσα έξοδος του αισθητήρα προβάλλεται στα πεδία εισόδου.

4. Τοποθετήστε τον αισθητήρα στο πρώτο περιβάλλον ρύθμισης (π.χ. για τον αισθητήρα της θερμοκρασίας θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε δοχείο με νερό που βρίσκεται σε γνωστή θερμοκρασία).

5. Εισάγετε τη ρύθμιση γνωστής τιμής στο κουτί Value1 (π.χ. η θερμοκρασία του που προσδιορίζεται με ανεξάρτητη μέτρηση (χρησιμοποιήστε θερμόμετρο).

6. Κάντε κλικ για να αποθηκεύσετε την τιμή αυτή.

7. Τοποθετήστε τον αισθητήρα σε ένα δεύτερο περιβάλλον ρύθμισης (π.χ. σε δοχείο νερού μιας άλλης γνωστής θερμοκρασίας)

8. Εισάγετε αυτή τη γνωστή τιμή(π.χ. τη θερμοκρασία) στο κουτί Value2.

9. Κάντε κλικ για να αποθηκεύσετε την τιμή αυτή.

Αν θέλετε να σώσετε τη ρύθμιση που κάνατε για τον αισθητήρα κάντε κλικ στο κουτί Save.Το κουτί διαλόγου Save Calibration θα ανοίξει .

10. Κάντε κλικ για να ολοκληρωθεί η διαδικασία της ρύθμισης.

Σημείωση:Για πιο καλά αποτελέσματα τα δύο σημεία της ρύθμισης θα πρέπει να καλύπτουν την περιοχή στην οποία προβλέπετε ότι θα βρεθούν τα αποτελέσματα του πειράματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΠΕΙΡΑΜΑ 1: ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ ΣΤΙΣ ΕΚΡΗΞΕΙΣ

ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ:

1. **Δυναμικό αμαξίδιο με μάζα (ME-9430)**
2. **Αμαξίδιο σύγκρουσης(ME-9454)**
3. **Τροχιά αμαξιδίων**
4. **Μετροταινία**
5. **Ζυγαριά**

***Αντί της μετροταινίας και του χρονομέτρου μπορεί να χρησιμοποιηθούν αισθητήρες και το κατάλληλο λογισμικό.**

Σκοπός

Ο σκοπός αυτού του πειράματος είναι να δείξει τη διατήρηση της ορμής για δυο αμαξίδια που απωθούνται το ένα από το άλλο.

Θεωρία

Όταν δύο αμαξίδια απωθούνται το ένα από το άλλο και δεν υπάρχει συνισταμένη εξωτερική δύναμη η ολική ορμή του συστήματος των δύο αμαξιδίων διατηρείται. Επειδή το σύστημα αρχικά ηρεμεί οι τελικές ορμές των δύο αμαξιδίων θα είναι αντίθετες (ίσο μέτρο και αντίθετη φορά) έτσι ώστε η ολική ορμή του συστήματος να παραμένει μηδέν.

$$p = m_1 u_1 - m_2 u_2 = 0$$

Έτσι ο λόγος της τελικής ταχύτητας των αμαξιδίων είναι ίση με τον αντίστροφο λόγο των μαζών των αμαξιδίων.

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Για να απλοποιήσουμε το πείραμα, το αρχικό σημείο της ισορροπίας των δυο αμαξιδίων έχει επιλεγεί έτσι ώστε τα δύο αμαξίδια να φτάνουν στο τέλος της τροχιάς ταυτόχρονα. Η ταχύτητα, που είναι η μετατόπιση δια του χρόνου, μπορεί να προσδιοριστεί με μέτρηση της μετατόπισης και του χρόνου κίνησης που είναι ο ίδιος για τα δύο αμαξίδια.

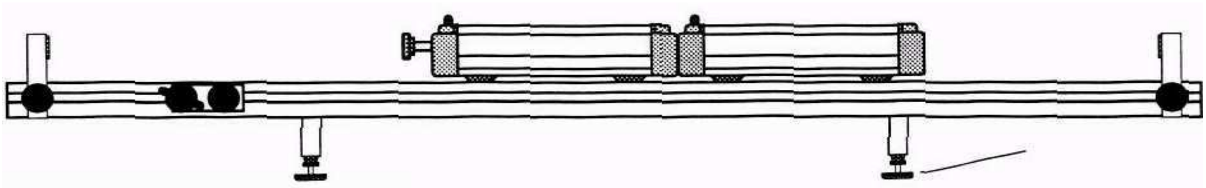
$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\frac{\Delta x_1}{\Delta t}}{\frac{\Delta x_2}{\Delta t}} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$$

Έτσι ο λόγος των μετατοπίσεων είναι ίσος με τον αντίστροφο λόγο των μαζών.

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Εκτέλεση πειράματος

Ρυθμίστε την τροχιά με τοποθέτηση πάνω σ΄ αυτήν ενός αμαξιδίου για να δείτε προς πια κατεύθυνση κινείται. Ρυθμίστε τα πόδια για να ανυψώσετε ή να χαμηλώσετε τα άκρα της τροχιάς έως ότου το αμαξίδιο που τοποθετούμε σε ηρεμία συνεχίζει να μην κινείται.



Σχ. 1.1 Στήσιμο εξοπλισμού ***Ρυθμιστικό πόδι***

6.

7. Για κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις τοποθετήστε τα δυο αμαξίδια το ένα απέναντι από το άλλο με το έμβολο των δυναμικών αμαξιδίων τοποθετημένο εντελώς μέσα. Απελευθερώστε το έμβολο χτυπώντας το με ένα χάρακα και παρακολουθήστε την κίνηση των δύο αμαξιδίων προς τα άκρα της τροχιάς. Πειραματιστείτε με διαφορετικά σημεία εκκίνησης έως ότου τα δύο αμαξίδια φτάσουν στο αντίστοιχο άκρο της τροχιάς στον ίδιο χρόνο. Έπειτα ζυγίστε τα δύο αμαξίδια και καταγράψτε τις μάζες και τις μετατοπίσεις από τα σημεία εκκίνησης στον πίνακα 1.1.

<u>1η Περίπτωση:</u> **Αμαξίδια με ίδια μάζα (χρησιμοποιήστε δύο αμαξίδια χωρίς πρόσθετες μάζες)**

<u>2η περίπτωση:</u> **Αμαξίδια με διαφορετικές μάζες (τοποθετήστε μια πρόσθετη μάζα στο ένα αμαξίδιο και καμία στο άλλο)**

<u>3η περίπτωση:</u>**Αμαξίδια με διαφορετικές μάζες (τοποθετήστε δύο επιπλέον πρόσθετες μάζες στο ένα αμαξίδιο και καμία στο άλλο)**

<u>4η περίπτωση:</u> **Αμαξίδια με διαφορετικές μάζες (τοποθετήστε δύο πρόσθετες μάζες στο ένα αμαξίδιο και μία πρόσθετη μάζα στο άλλο)**

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1

ΜΑΖΑ 1	ΜΑΖΑ 2	ΘΕΣΗ	ΔX_1	ΔX_2	$\Delta X_1 / \Delta X_2$	M_2 / M_1

Ανάλυση δεδομένων

- **Για κάθε μία από τις περιπτώσεις υπολογίστε την απόσταση από το σημείο εκκίνησης έως το τέλος της τροχιάς. Καταγράψτε το αποτέλεσμα στον πίνακα 1.1.**
- **Υπολογίστε το λόγο των μετατοπίσεων και καταγράψτε τον στον πίνακα.**
- **Υπολογίστε το λόγο των μαζών και καταγράψτε τον στον πίνακα.**

Ερωτήσεις

1. Είναι ο λόγος των μετατοπίσεων ίσος με το λόγο των μαζών σε κάθε περίπτωση; Με άλλα λόγια η ορμή διατηρείται;

2. Όταν αμαξίδια με διαφορετικές μάζες απωθούνται το ένα από το άλλο ποιο αμαξίδιο έχει τη μεγαλύτερη ορμή;

3. Όταν τα αμαξίδια με διαφορετικές μάζες απομακρύνονται το ένα από το άλλο ποιο έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια;

4. Το σημείο εκκίνησης εξαρτάται από ποιο αμαξίδιο έχει πιεσμένο το έμβολο; Γιατί;

Παρατηρήσεις- Μετρήσεις

- **Μετρήσεις**

Πίνακας 1.1

Μάζα1(g)	Μάζα2(g)	Θέση	ΔX_1	ΔX_2	$\Delta X_1/\Delta X_2$	M_2/M_1
681.11	688.57	114	101	99	1.020	1.011
1171.00	688.57	95	48	80	0.600	0.588
1660.89	688.57	110	42	95	0.442	0.414
1660.89	1178.46	91	51	69	0.739	0.710

- **<u>Παρατηρήσεις</u>**

1. ***Πριν αρχίσουμε την άσκηση πρέπει να γίνεται επιμελής καθαρισμός της τροχιάς . Αυτό να επαναλαμβάνεται σε κάθε άσκηση.***
2. ***Οι μάζες πρέπει να προστίθενται ομοιόμορφα.***
3. ***Ο αισθητήρας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για προσδιορισμό της θέσης των αμαξιδίων , αλλά η μέτρηση μπορεί να γίνει και χωρίς την χρήση αισθητήρα.***
4. ***Υπάρχει δυσκολία στην έναρξη της κίνησης , λόγω του μηχανισμού που χρησιμοποιείται.***
5. ***Η αρχική θέση και οι αποστάσεις που διανύουν τα αμαξίδια επιλέγονται έτσι ώστε να εκτελείται κατά το καλύτερο δυνατόν η άσκηση.***

Στην πειραματική διαδικασία μπορεί να εξεταστεί αν παίζει ρόλο σε ποιο αμαξίδιο βρίσκεται ο μηχανισμός εκκίνησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

ΠΕΙΡΑΜΑ 2: ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ ΣΤΙΣ ΚΡΟΥΣΕΙΣ

ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ

1. **Δυναμικό αμαξίδιο και σετ με μάζες(ME-9430)**
2. **Αμαξίδιο σύγκρουσης(ME-9454)**
3. **(2) Σετ από μαγνήτες που έχουν τοποθετηθεί.**
4. **Τροχιά δυναμικών αμαξιδίων**
5. **Χαρτί (Μιλιμετρέ)**

***Αντί της μετροταινίας και του χρονομέτρου μπορεί να χρησιμοποιηθούν αισθητήρες και το κατάλληλο λογισμικό.**

ΣΚΟΠΟΣ

Ο σκοπός αυτού του πειράματος είναι η παρατήρηση της αρχή διατήρησης της ορμής για τις ελαστικές και πλαστικές κρούσεις.

ΘΕΩΡΙΑ

Όταν δύο αμαξίδια συγκρούονται, η ολική ορμή $\vec{p} = m\vec{u}$ και των δύο αμαξιδίων διατηρείται ανεξάρτητα από το είδος της κρούσης. Ελαστική κρούση έχουμε όταν η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο αμαξιδίων δεν μειώνεται κατά την κρούση. Σ' αυτό το πείραμα, το σύστημα των μαγνητών χρησιμοποιείται για να ελαττώσει τις απώλειες ενέργειας από τις τριβές κατά τη διάρκεια της κρούσης. Πλαστική κρούση είναι όταν τα αμαξίδια μετά τη κρούση μένουν ενωμένα.

ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

1. **Ρυθμίστε την τροχιά με τοποθέτηση πάνω σ΄ αυτήν ενός αμαξιδίου για να δείτε προς πια κατεύθυνση κινείται. Ρυθμίστε τα πόδια για να ανυψώσετε ή να χαμηλώσετε τα άκρα της τροχιάς έως ότου το αμαξίδιο που τοποθετούμε σε ηρεμία συνεχίζει να μην κινείται.**
2. **Σχεδιάστε δύο διαγράμματα(ένα πριν τη κρούση και ένα μετά τη κρούση) για κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις. Σε κάθε διάγραμμα, το μήκος του διανύσματος της ταχύτητας κάθε αμαξιδίου θα αντιστοιχεί στην ταχύτητά του.**

ΜΕΡΟΣ 1ο : ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

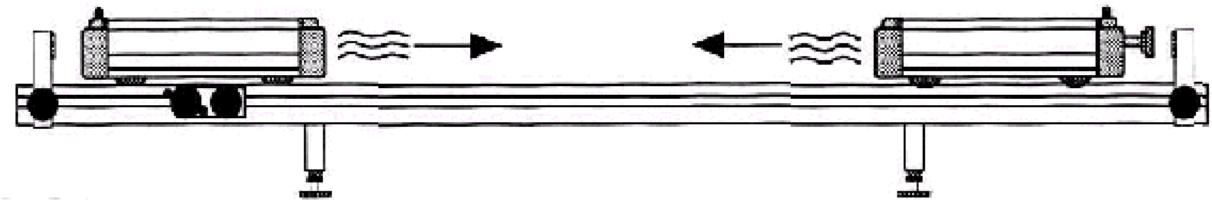
Α. ΑΜΑΞΙΔΙΑ ΜΕ ΙΣΕΣ ΜΑΖΕΣ

8. Τοποθετήστε τα δύο αμαξίδια έτσι ώστε τα μέρη που έχουν τους μαγνήτες να είναι το ένα απέναντι από το άλλο.

Περίπτωση 1ο **Τοποθετήστε ένα αμαξίδιο σε ηρεμία στο μέσο της τροχιάς. Δώστε στο άλλο αμαξίδιο μία αρχική ταχύτητα με κατεύθυνση προς το αμαξίδιο που ισορροπεί.**

Περίπτωση 2ο **Τοποθετήστε τα αμαξίδια το ένα στη μια άκρη και το άλλο στη άλλη άκρη της τροχιάς. Δώστε σε κάθε ένα αμαξίδιο περίπου την ίδια ταχύτητα με κατεύθυνση από το ένα προς το άλλο. (Βλέπε παρατήρηση 3)**

Περίπτωση 3ο **Τοποθετήστε και τα δύο αμαξίδια στο ένα άκρο της τροχιάς. Δώστε στο πρώτο αμαξίδιο μία μικρή ταχύτητα και στο δεύτερο αμαξίδιο μία μεγαλύτερη ταχύτητα έτσι ώστε το δεύτερο αμαξίδιο να προλάβει το πρώτο αμαξίδιο.**



Σχ. 2.1 Στήσιμο εξοπλισμού

Β. ΑΜΑΞΙΔΙΑ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΜΑΖΕΣ

Τοποθετήστε δύο πρόσθετες μάζες σε ένα από τα δύο αμαξίδια έτσι ώστε η μάζα του ενός αμαξιδίου να είναι περίπου τρεις φορές (3Μ) τη μάζα του άλλου αμαξιδίου (1Μ).

Περίπτωση 1η: **Τοποθετήστε το αμαξίδιο 3Μ σε ηρεμία στο μέσο της τροχιάς. Δώστε στο αμαξίδιο 1Μ μια αρχική ταχύτητα προς το αμαξίδιο 3Μ.**

Περίπτωση 2η: **Τοποθετήστε το αμαξίδιο 1Μ στο μέσο της τροχιάς. Δώστε στο αμαξίδιο 3Μ μια αρχική ταχύτητα προς το αμαξίδιο 1Μ.**

Περίπτωση 3η: **Τοποθετήστε τα δύο αμαξίδια στα δύο άκρα της τροχιάς. Δώστε σε κάθε ένα αμαξίδιο περίπου την ίδια ταχύτητα ώστε να κινούνται το ένα προς το άλλο.**

Περίπτωση 4η: **Τοποθετήστε και τα δυο αμαξίδια στο ένα άκρο της τροχιάς. Δώστε στο πρώτο αμαξίδιο μια μικρή ταχύτητα και στο δεύτερο μια μεγαλύτερη**

ταχύτητα έτσι ώστε το δεύτερο αμαξίδιο να φτάσει το πρώτο. Κάντε αυτό και για τις δύο περιπτώσεις: Με το 1Μ πρώτο και μετά με το 3Μ πρώτο.

ΜΕΡΟΣ $2^{Ο}$:ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

3. **Προσανατολίστε τα δύο αμαξίδια έτσι ώστε όταν έρθουν σε επαφή να γίνουν ένα με την βοήθεια των μαγνητών. Βεβαιωθείτε ότι το έμβολο είναι πιεσμένο απόλυτα μέσα έτσι ώστε να μην εμποδίζει την κρούση.**
4. **Επαναλάβατε την ίδια διαδικασία που αναφέρεται στο πρώτο μέρος για αμαξίδια με ίσες μάζες και αμαξίδια με διαφορετικές μάζες.**

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Όταν τα αμαξίδια έχουν την ίδια μάζα και αντίθετες ταχύτητες (ίσα μέτρα και αντίθετη φορά) και κολλούν μεταξύ τους, αυτά σταματούν. Τι συμβαίνει με την ορμή κάθε αμαξιδίου; Η ολική ορμή διατηρείται;

2. Όταν τα δύο αμαξίδια έχουν την ίδια μάζα, αντίθετες ταχύτητες και συγκρούονται ελαστικά, ποια είναι η ολική τελική ορμή του συστήματος των δύο αμαξιδίων;

Παρατηρήσεις

1. ***Χωρίς κάποια μέθοδο μέτρησης των ταχυτήτων των αμαξιδίων, η άσκηση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για ποιοτική ανάλυση (π.χ. στο Α τα αμαξίδια ανταλλάσσουν ταχύτητες.***
2. ***Η ταχύτητα των δύο αμαξιδίων θα μπορούσε να μετρηθεί με τους αισθητήρες αν το λογισμικό του Logger Pro μπορούσε να δώσει συγχρόνως και τις δύο ταχύτητες. Στο υπάρχον λογισμικό μπορεί να μετρηθεί η ταχύτητα καθενός αμαξιδίου αλλά όχι συγχρόνως.***
3. ***Είναι πρακτικώς αδύνατο να δώσουμε την ίδια ταχύτητα στα δύο αμαξίδια σε όποια περίπτωση αυτό ζητείται.***

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο}

Πείραμα 3 : Απλός αρμονικός ταλαντωτής.

Απαιτούμενος εξοπλισμός.

- **Δυναμικό αμαξίδιο με μάζα (ME-9430)**
- **Δύο (2) ελατήρια.**
- **Άγκιστρο μάζας και σετ μαζών (ME-9348)**
- **Σκοινί.**
- **Μιλιμετρέ χαρτί για γραφικές παραστάσεις.**
- **Τροχιά για το δυναμικό αμαξίδιο.**
- **Τροχαλία με σφιγκτήρα.**
- **Χρονόμετρο.**
- **Ζυγαριά (για υπολογισμό των μαζών).**

***Αντί της μετροταινίας και του χρονομέτρου μπορεί να χρησιμοποιηθούν αισθητήρες και το κατάλληλο λογισμικό.**

Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι η μέτρηση της περιόδου της ταλάντωσης ενός συστήματος ελατηρίου-μάζας και η σύγκριση της με τη θεωρητική τιμή της.

Θεωρία

Για μια μάζα προσδεδεμένη σε ένα ελατήριο, η θεωρητική περίοδος της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}}$ **, όπου T είναι ο χρόνος για μια πλήρη ταλάντωση, m είναι η μάζα που ταλαντώνεται και K η σταθερά του ελατηρίου.**

Σύμφωνα με το νόμο του Hooke, η δύναμη που ασκείται από το ελατήριο είναι ανάλογη με την παραμόρφωση $F = -K \cdot x$, όπου K είναι η σταθερά αναλογίας. Έτσι η σταθερά του ελατηρίου μπορεί πειραματικά να προσδιοριστεί με την εφαρμογή διαφόρων δυνάμεων και τη μέτρηση των αντιστοίχων παραμορφώσεων του ελατηρίου. Από το γράφημα της δύναμης σε συνάρτηση της παραμόρφωσης, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σταθερά K

Πειραματική διαδικασία

Μετρήσεις για τον υπολογισμό της θεωρητικής περιόδου

1. Χρησιμοποιήστε τη ζυγαριά για να βρείτε, τη μάζα του αμαξιδίου. Σημειώστε αυτή την τιμή στην αντίστοιχη θέση του πιν.3.1.

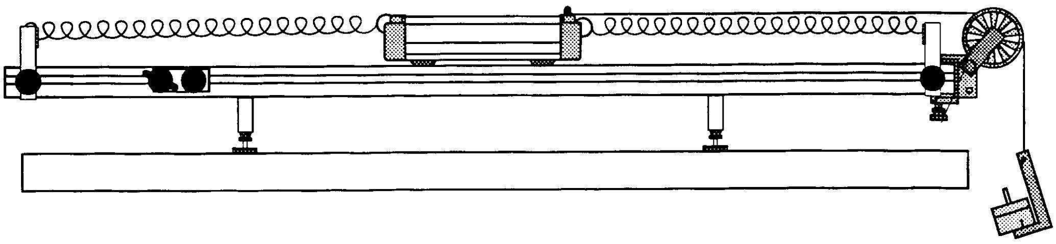
2. Με τη βοήθεια του αμαξιδίου τοποθετήστε την τροχιά σε οριζόντια θέση. Η ρύθμιση θα γίνει με την βοήθεια των ποδιών - στηριγμάτων της τροχιάς. Η ρύθμιση γίνεται μέχρις ότου το αμαξίδιο που θα τοποθετήσουμε στην τροχιά σε ηρεμία συνεχίζει να παραμένει ακίνητο. Τοποθετήστε την τροχαλία με την βοήθεια του σφιγκτήρα στο ένα άκρο της τροχιάς.

3. Τοποθετήστε το αμαξίδιο στην τροχιά και προσδέστε ένα ελατήριο σε κάθε άκρο του αμαξιδίου με τη βοήθεια της κατάλληλης υποδοχής . Προσδέστε το άλλο άκρο κάθε ελατηρίου στα άκρα της τροχιάς. (βλέπε σχήμα 3.1)

4. Προσδέστε ένα σκοινί στο ένα άκρο του αμαξιδίου και κρεμάστε ένα "φορέα" μάζας μέσω της τροχαλίας όπως στο σχήμα 3.1.

5. Σημειώστε τη θέση ισορροπίας στον πίν. 3.1.

6.Προσθέστε μια μάζα στον "φορέα" μάζας και σημειώστε τη νέα θέση. Επαναλάβετε το ίδιο για πέντε(5) διαφορετικές μάζες, προσέχοντας να μην τεντώσετε υπερβολικά τα ελατήρια. Επειδή και τα δύο ελατήρια δρούν στην μάζα, η μέθοδος αυτή θα δώσει την ενεργό (πραγματική) σταθερά ελατηρίου και για τα δύο ελατήρια.



Σχήμα 3.1 Στήσιμο του εξοπλισμού.

<u>Δεδομένα και ανάλυση</u>

<u>Πίνακας 3.1</u>

<u>Μάζα αμαξιδίου</u>   <u>Θέση ισορροπίας</u>

Προστιθέμενες μάζες	Θέση	Μετατόπιση από ισορροπία	Δύναμη (mg)

<u>Μέτρηση της πειραματικής περιόδου</u>

1. Μετακινήστε το αμαξίδιο από την θέση ισορροπίας κατά ορισμένη απόσταση και αφήστε το ελεύθερο. Μετρήστε το χρόνο πέντε(5) ταλαντώσεων και σημειώστε το χρόνο στον πίν. 3.2.

2. Επαναλάβετε τη μέτρηση τουλάχιστον πέντε(5) φορές, με την ίδια αρχική μετατόπιση (πλάτος).

3. Προσθέστε μια μάζα 500 g στο αμαξίδιο. Μετρήστε το χρόνο, πέντε(5) ταλαντώσεων, πέντε(5) φορές και σημειώστε αυτά τα δεδομένα στον πίν. 3.2.

<u>Υπολογισμοί</u>

<u>Θεωρητική περίοδος</u>

1.Με χρήση των δεδομένων του πιν.3.1 ,σχεδιάστε το γράφημα της δύναμης σα συνάρτηση της μετατόπισης. Σχεδιάστε την βέλτιστη ευθεία με την βοήθεια των δεδομένων και προσδιορίστε την κλίση της ευθείας. Η κλίση ισούται με την ενεργό (πραγματική) σταθερά Κ του ελατηρίου.

K=………

2. Με χρήση της μάζας του αμαξιδίου και της σταθεράς του ελατηρίου , υπολογίστε την περίοδο με την βοήθεια της θεωρητικής σχέσης $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}}$. Επίσης υπολογίστε τη θεωρητική περίοδο για το αμαξίδιο με μάζα 500g σ' αυτό.

Αμαξίδιο(χωρίς επιπρόσθετη μάζα) : T=………

Αμαξίδιο με μάζα : T= ………

<u>Πειραματική περίοδος</u>

1. Με χρήση των δεδομένων του πίν.3.2, υπολογίστε την μέση τιμή για (πέντε) 5 ταλαντώσεις με και χωρίς τη μάζα των 500g στο αμαξίδιο.

2.Υπολογίστε την περίοδο με διαίρεση αυτών των τιμών με το 5. Σημειώστε τις περιόδους στον πίν.3.2.

<u>Πίνακας 3.2</u>

Μέτρηση	Χρόνος πέντε ταλαντώσεων	Περίοδος
1		Χωρίς επιπρόσθετη μάζα
2		
3		
4		
5		
Μέση τιμή		
1		Με επιπρόσθετη μάζα
2		
3		
4		
5		
Μέση τιμή		

<u>Σύγκριση</u>

Υπολογίστε την % διαφορά μεταξύ των μετρούμενων και θεωρητικών τιμών :

(Αμαξίδιο χωρίς επιπρόσθετη μάζα) Διαφορά%=………

(Αμαξίδιο με μάζα) Διαφορά%=………

<u>Ερωτήσεις</u>

1.Αυξάνεται ή μειώνεται η περίοδος της ταλάντωσης όταν η μάζα αυξάνεται; Ένα αμαξίδιο με μεγαλύτερη μάζα κάνει ταλαντώσεις πιο γρήγορα ή πιο αργά;

2.Αν η αρχική μετατόπιση από την ισορροπία αλλάξει , η περίοδος της ταλάντωσης αλλάζει; Δοκιμάστε το.

Μετρήσεις – Παρατηρήσεις

- **Μετρήσεις**

Μάζα αμαξιδίου: 693.21g

Θέση ισορροπίας: 1.325m

Πίνακας 3.1

Προστιθέμενες μάζες (g)	Θέση (m)	Μετατόπιση από ισορροπία (m)	Δύναμη (mg) (N)
30	1.372	0.047	0.3
50	1.403	0.078	0.5
80	1.450	0.125	0.8
130	1.528	0.203	1.3
230	1.684	0.359	2.3

Πίνακας 3.2

Μέτρηση	Χρόνος 5 ταλαντώσεων	Περίοδος
1	10.8	Χωρίς επιπρόσθετη μάζα
2	10.5	
3	10.7	
4	10.5	
5	10.6	
Μέση τιμή	10.62	
1	13.7	Με επιπρόσθετη μάζα 500g
2	13.8	
3	13.5	
4	13.6	
5	13.7	
Μέση τιμή	13.66	

- **Παρατηρήσεις**

1. ***Ο αισθητήρας πρέπει να βλέπει το κινούμενο σώμα. Για το λόγο αυτό πρέπει να χρησιμοποιήσουμε βάθρο, πάνω στο οποίο τοποθετούμε τον αισθητήρα.***
2. ***Αν θέλετε καλλίτερα αποτελέσματα να χρησιμοποιήσετε μάζες 10-50g. στο πρώτο μέρος της άσκησης για τον προσδιορισμό της σταθεράς k***
3. ***Αν η γραφική παράσταση της ταλάντωσης εμφανίζει παραμορφώσεις θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μικρότερο πλάτος ταλάντωσης.***

4. ***Ενδεικτική περίπτωση θέσεων, είναι να τοποθετήσουμε τον αισθητήρα στην θέση 100 (πάνω σε βάθρο για να βλέπει το πέτασμα), το πέτασμα στη θέση 160 και αρχική απομάκρυνση 20 cm .***

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

Πείραμα 4: Ταλαντώσεις σε κεκλιμένο επίπεδο

Απαιτούμενος εξοπλισμός

- Δυναμικό αμαξίδιο με μάζα (ME-9430)
- Ελατήριο
- Βάση και ράβδος υποστήριξης(ME-9355)
- Ζυγαριά για τις μάζες
- Τροχιά του δυναμικού αμαξιδίου με στοπ και σφιγκτήρα
- Άγκιστρο μάζας και σετ μαζών
- Χρονόμετρο

*Αντί της μετροταινίας και του χρονομέτρου μπορεί να χρησιμοποιηθούν αισθητήρες και το κατάλληλο λογισμικό.

Σκοπός

Σκοπός είναι η μέτρηση της περιόδου ταλάντωσης ενός συστήματος ελατηρίου-μάζας σε κεκλιμένο επίπεδο με διάφορες γωνίες κλίσης και σύγκριση της με τη θεωρητική τιμή.

Θεωρία

Για μια μάζα m προσδεμένη σε ένα ελατήριο η θεωρητική περίοδος της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}}$, όπου T ο χρόνος για μια πλήρη ταλάντωση , m η μάζα που κάνει την ταλάντωση και K η σταθερά του ελατηρίου.

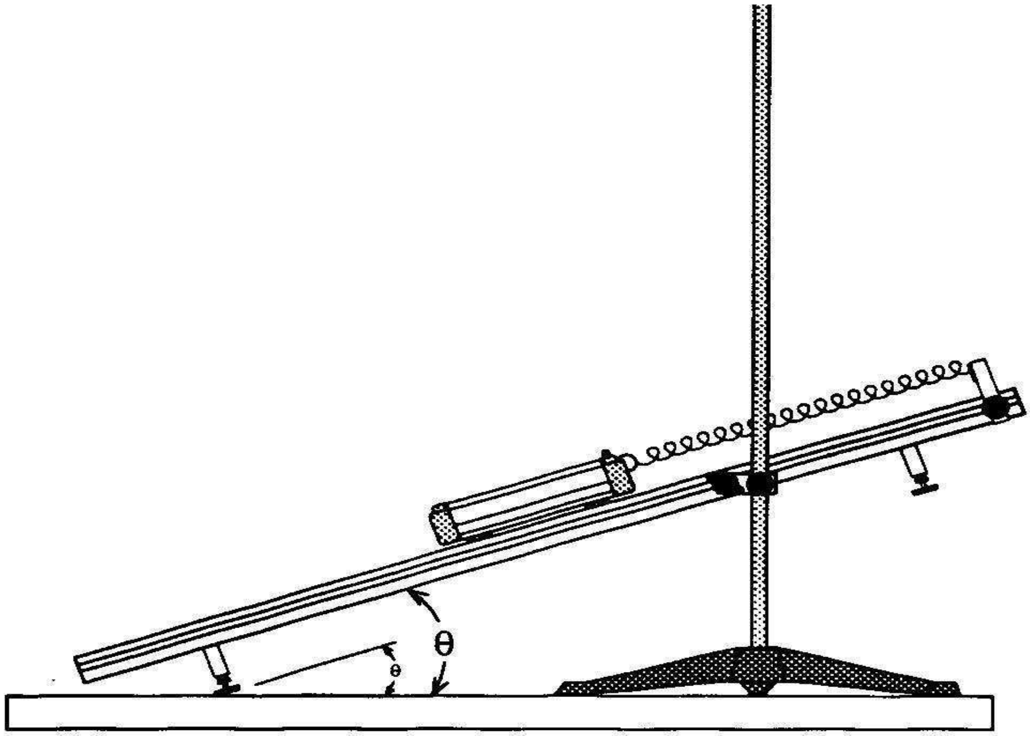
Σύμφωνα με το νόμο του Hooke , η δύναμη που ασκείται από το ελατήριο είναι ανάλογη της παραμόρφωσης $F=-K\cdot x$, όπου K είναι η σταθερά αναλογίας . Έτσι η σταθερά του ελατηρίου μπορεί να προσδιοριστεί πειραματικά με εφαρμογή διαφόρων δυνάμεων στο ελατήριο και αντίστοιχων παραμορφώσεων του. Μετά με σχεδίαση της δύναμης σε σχέση με την παραμόρφωση , προσδιορίζουμε την σταθερά K που είναι ίση με την κλίση της ευθείας που προκύπτει.

Πειραματική διαδικασία

Μετρήσεις εύρεσης της θεωρητικής περιόδου

1. Χρησιμοποιήστε τη ζυγαριά για να βρείτε τη μάζα του αμαξιδίου. Σημειώστε αυτή την τιμή στην αντίστοιχη θέση του πίν.4.1.
2. Τοποθετήστε το αμαξίδιο στην τροχιά και προσδέστε ένα ελατήριο στο άκρο του αμαξιδίου που διαθέτει την κατάλληλη υποδοχή. Μετά προσδέστε το άλλο άκρο του ελατηρίου στο άκρο της τροχιάς.
(βλέπε σχήμα 4.1).
3. Με ανύψωση του άκρου της τροχιάς στο οποίο είναι συνδεδεμένο το ελατήριο, η τροχιά παίρνει τη μορφή κεκλιμένου επιπέδου. Η γωνία κλίσης πρέπει να είναι τόσο μικρή , όση απαιτείται για να μην παραμορφωθεί το ελατήριο περισσότερο από το μισό μήκος της τροχιάς. Μετρήστε αυτή τη γωνία και σημειώστε αυτήν στην αντίστοιχη θέση του πίν.4.1.
4. Σημειώστε τη θέση ισορροπίας στον πιν.4.1.
4. Προσθέστε μια μάζα στο αμαξίδιο και σημειώστε τη νέα θέση ισορροπίας.

Επαναλάβετε το ίδιο για πέντε (5) διαφορετικές μάζες , προσέχοντας να μην τεντώσετε υπερβολικά το ελατήριο.



Σχήμα 4.1 Στήσιμο του εξοπλισμού.

Πίνακας 4.1

Θέση ισορροπίας= Μάζα αμαξιδίου=

Γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου=

Επιπρόσθετη μάζα	θέση	Μετατόπιση από θέση ισορροπίας	Δύναμη(mg ημθ)

<u>Μέτρηση της πειραματικής περιόδου</u>

1. Μετακινήστε το αμαξίδιο από τη θέση ισορροπίας κατά μια ορισμένη απόσταση (πλάτος) και αφήστε το ελεύθερο. Μετρήστε το χρόνο για τρεις (3) ταλαντώσεις και σημειώστε αυτόν στον πίν. 4.2.
2. Επαναλάβετε τη μέτρηση τουλάχιστον πέντε(5) φορές , με χρήση της ίδιας αρχικής μετατόπισης (πλάτος).
3. Αλλάξτε τη γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου και επαναλάβετε τα βήματα 1 και 2.

<u>Υπολογισμοί</u>

<u>Θεωρητική περίοδος</u>

1. Με χρήση των δεδομένων του πίν. 4.1 , υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται λόγω της επιπρόσθετης μάζας στο αμαξίδιο: F=mg ημθ , όπου θ η γωνία κλίσης. Σχεδιάστε το γράφημα της δύναμης σε συνάρτηση με την παραμόρφωση. Χαράξτε τη βέλτιστη ευθεία με βάση τα δεδομένα και προσδιορίστε την κλίση της ευθείας. Η κλίση ισούται με την ενεργό (πραγματική) σταθερά του ελατηρίου Κ. Κ=………

Με χρήση της μάζας του αμαξιδίου και της σταθεράς του ελατηρίου, υπολογίστε την περίοδο με χρήση της θεωρητικής σχέσης

1. Με χρήση της μάζας του αμαξιδίου και της σταθεράς του ελατηρίου υπολογίστε την περίοδο από τη σχέση $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}}$.

T=………

Πίνακας 4.2

Χρόνος για τρεις(3) ταλαντώσεις.

Γωνία	Μέτρηση 1	2	3	4	5	Μέση τιμή	Περίοδος

Πειραματική περίοδος

1. Με χρήση των δεδομένων του πίν. 4.2 υπολογίστε τη μέση τιμή για τρεις(3) ταλαντώσεις.

2. Υπολογίστε την περίοδο με διαίρεση αυτών των τιμών με το 3 και σημειώστε τις περιόδους στον πίν. 4.2

Ερωτήσεις

1. **Όταν αλλάζουμε τη γωνία κλίσης , αλλάζει η περίοδος;**
2. **Ποια η σχέση πειραματικών και θεωρητικών τιμών;**
3. **Όταν αλλάζουμε τη γωνία κλίσης αλλάζει η θέση ισορροπίας;**
4. **Ποια θα είναι η περίοδος αν η γωνία κλίσης είναι 90^0;**

Παρατηρήσεις-Μετρήσεις

- **Μετρήσεις**

Μάζα αμαξιδίου: 693.21g

Θέση ισορροπίας: 1.289m

Γωνία κλίσης: 10^0

<u>Πίνακας 4.1</u>

Προστιθέμενη μάζα	**Θέση**	**Μετατόπιση από ισορροπία**	**Δύναμη (mgημθ) (N)**
200g	**1.183m**	**0.106**	**1.55**
300g	**1.127m**	**0.162**	**1.72**
350g	**1.110m**	**0.179**	**1.81**
370g	**1.088m**	**0.201**	**1.85**
390g	**1.076m**	**0.213**	**1.88**

<u>Πίνακας 4.2</u>

Χρόνος 3 ταλαντώσεων

Γωνία	**Μέτρηση 1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Μέση τιμή**	**Περίοδος**
8^0	**8.9**	**8.9**	**8.9**	**8.9**	**8.9**	**8.90**	**2.97**
10^0	**8.8**	**8.9**	**8.9**	**8.9**	**8.9**	**8.88**	**2.96**
12^0	**8.7**	**8.7**	**8.6**	**8.7**	**8.7**	**8.68**	**2.89**

- **Παρατηρήσεις**

Για καλύτερη εμφάνιση των γραφικών και των ενδείξεων κάντε κλικ στο View και μετά στο Autoscale.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7°

Πείραμα 5: Ελατήρια συνδεδεμένα σε σειρά ή παράλληλα

Απαιτούμενος εξοπλισμός

- **Δυναμικό αμαξίδιο με μάζα(ΜΕ-9430)**
- **Τροχιά για το αμαξίδιο με στοπ.**
- **Δύο (2) ελατήρια.**
- **Βάση και ράβδος υποστήριξης(ΜΕ-9355).**
- **Ζυγαριά για τις μάζες.**
- **Χρονόμετρο.**

***Αντί της μετροταινίας και του χρονομέτρου μπορεί να χρησιμοποιηθούν αισθητήρες και το κατάλληλο λογισμικό.**

Σκοπός

Σκοπός μας είναι να μετρήσουμε την περίοδο ταλάντωσης των ελατηρίων (όταν αυτά είναι συνδεδεμένα σε σειρά ή παράλληλα) και να την συγκρίνουμε με την περίοδο ταλάντωσης κάθε ελατηρίου.

Θεωρία του πειράματος

Για μια μάζα m συνδεδεμένη σ΄ ένα ελατήριο σταθεράς Κ η θεωρητική περίοδος της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση : $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{m/\mathrm{K}}$ **. Αν η περίοδος μετρηθεί , η σταθερά Κ του ελατηρίου μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση** $\mathrm{K} = \dfrac{4\pi^2 m}{\mathrm{T}^2}$ **.**

Όταν δύο ελατήρια "συνδεθούν" σε σειρά ή παράλληλα ,οι σταθερές των ελατηρίων προστίθενται με διαφορετικούς τρόπους. Στη σύνδεση σε σειρά έχουμε $\dfrac{1}{\mathrm{K}} = \dfrac{1}{\mathrm{K}_1} + \dfrac{1}{\mathrm{K}_2}$ **και για** $\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_2 = \mathrm{K}$ **έχουμε** $\dfrac{1}{\mathrm{K}_{\varepsilon\nu}} = \dfrac{2}{\mathrm{K}}$ **ή** $\mathrm{K}_{\varepsilon\nu} = \dfrac{\mathrm{K}}{2}$ **.**

Στην παράλληλη σύνδεση $\mathrm{K}_{\varepsilon\nu} = \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2$ **και για** $\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_2 = \mathrm{K}$ **έχουμε** $\mathrm{K}_{\varepsilon\nu} = 2\mathrm{K}$ **.**

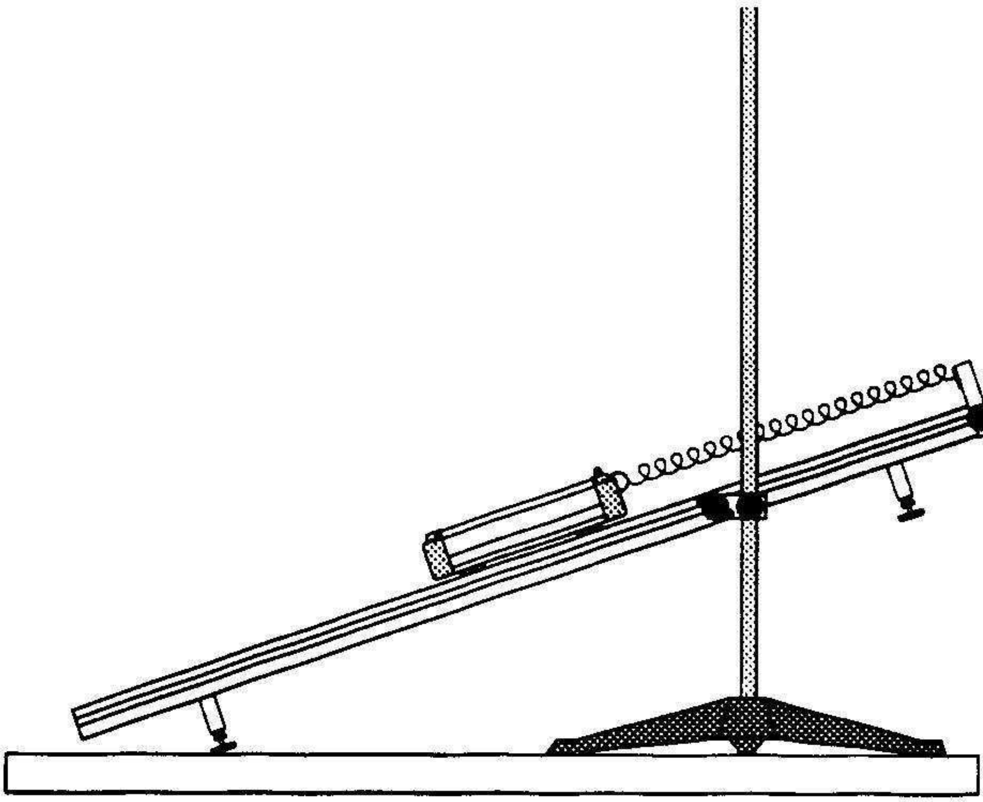
Πειραματική διαδικασία

Μέτρηση της Κ για ένα ελατήριο

1. **Χρησιμοποιήστε τη ζυγαριά για να βρείτε τη μάζα του αμαξιδίου. Σημειώστε αυτήν την τιμή στον πιν.5.1.**
2. **Τοποθετήστε το αμαξίδιο στην τροχιά και προσδέστε ένα ελατήριο στη μια άκρη του αμαξιδίου ,τοποθετώντας το άκρο ελατηρίου στην κατάλληλη**

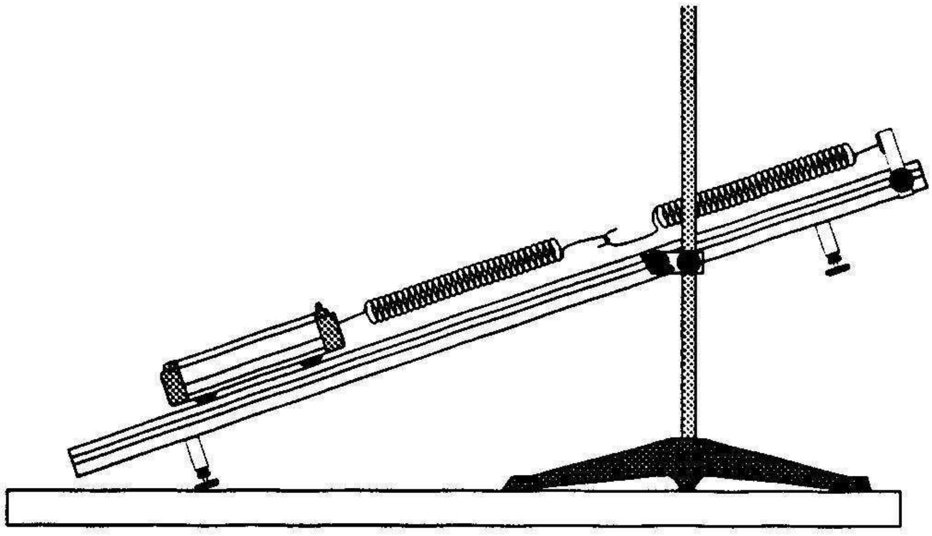
υποδοχή που υπάρχει στο αμαξίδιο. Μετά προσδέστε το άλλο άκρο του ελατηρίου στο τέλος τροχιάς (βλέπε σχήμα 5.1).

3. Ρυθμίστε τη θέση της τροχιάς , με ανύψωση του άκρου της που έχει προσδεμένο το ελατήριο. Λόγω της ανύψωσης του άκρου της τροχιάς το ελατήριο θα τεντωθεί. Ρυθμίστε τη γωνία της κλίσης της τροχιάς, ώστε το ελατήριο να μην εκταθεί περισσότερο από το μισό του μήκους της τροχιάς.
4. Μετακινήστε το αμαξίδιο από τη θέση ισορροπίας κατά ορισμένη απόσταση και αφήστε το ελεύθερο. Μετρήστε το χρόνο δύο(2) ταλαντώσεων και σημειώστε τον στον πίν.5.1. Επαναλάβετε αυτή την μέτρηση τουλάχιστον πέντε(5) φορές με χρήση της ίδιας αρχικής μετατόπισης (πλάτος).

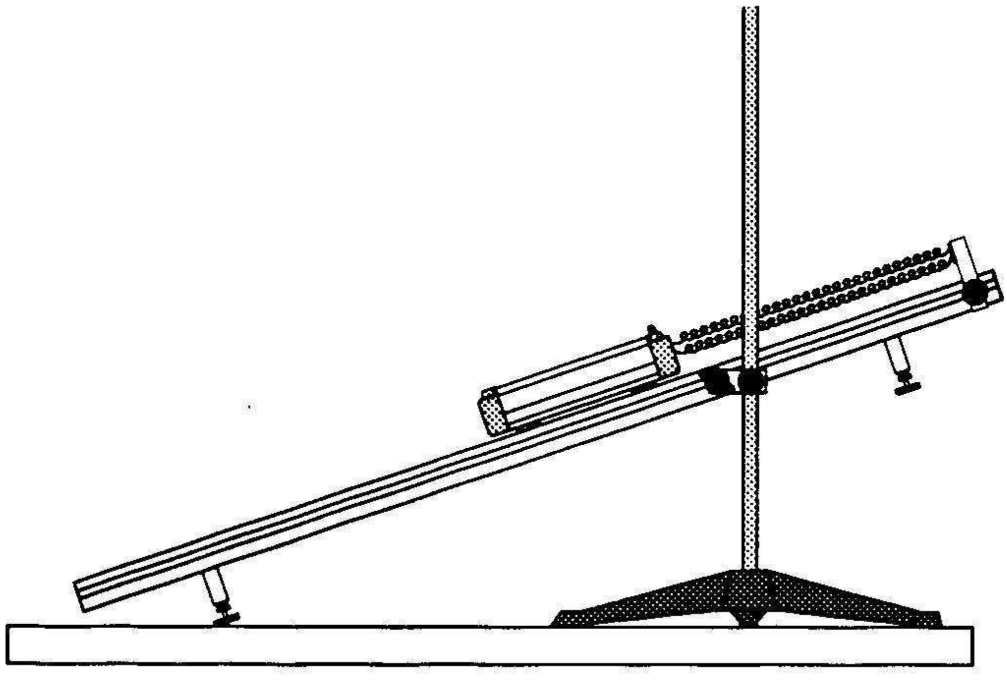


Σχήμα 5.1 Στήσιμο του εξοπλισμού.

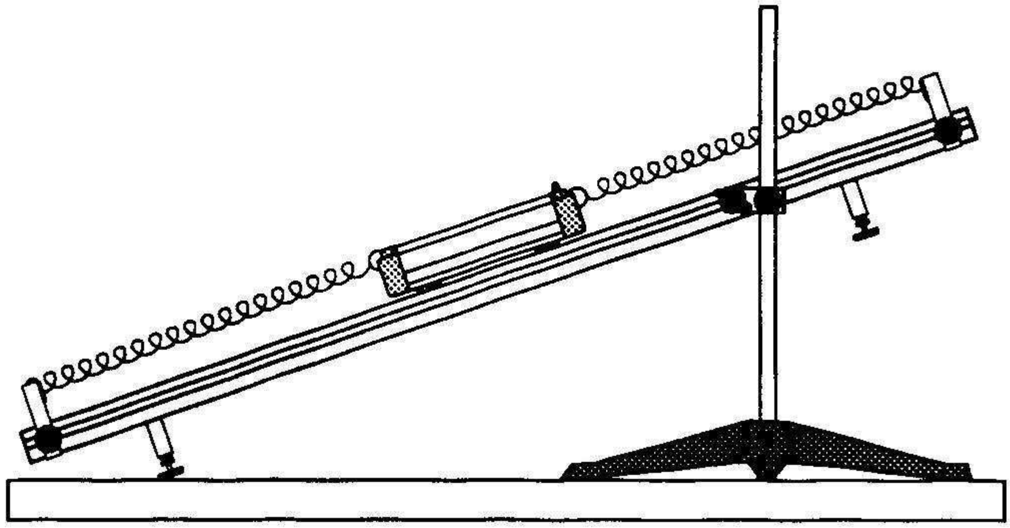
5. Προσθέστε ένα δεύτερο ελατήριο σε σειρά όπως στο σχήμα 5.2 και επαναλάβετε το βήμα 4.
6. Τοποθετήστε τα δύο ελατήρια παράλληλα όπως στο σχήμα 5.3 και επαναλάβετε το βήμα4.
7. Τοποθετήστε τα ελατήρια όπως στο σχήμα 5.4 και επαναλάβετε το βήμα 4.



Σχήμα 5.2 Ελατήρια σε σειρά.



Σχήμα 5.3 Ελατήρια παράλληλα.



Σχήμα 5.4 Τελική τοποθέτηση ελατηρίων.

<u>Υπολογισμοί</u>

1. **Με χρήση των δεδομένων του πίν.5.1 , υπολογίστε τη μέση τιμή για τη διάρκεια δύο(2) ταλαντώσεων.**
2. **Υπολογίστε την περίοδο με διαίρεση αυτών των χρόνων δια 2 και σημειώστε τις περιόδους στον πίν.5.1.**
3. **Με χρήση των περιόδων και της μάζας του αμαξιδίου , υπολογίστε τις (ενεργές) σταθερές των ελατηρίων.**

Πίνακας 5.1

Μάζα του αμαξιδίου =

Χρόνος δύο(2) ταλαντώσεων

Ελατήρια	1	2	3	4	5	Μέση τιμή	Περίοδος	K
Ένα								
Δύο σε σειρά								
Δύο παράλληλα								
Δύο ελατήρια με το αμαξίδιο στη μέση								

<u>Ερωτήσεις</u>

1. **Είναι $K_{εν}$=2K για ελατήρια σε σειρά ή παράλληλα;**

2. Είναι $K_{\varepsilon\nu}$=K για ελατήρια σε σειρά ή παράλληλα;

3. Είναι η τελευταία τοποθέτηση των ελατηρίων σε σειρά ή παράλληλα;

Παρατηρήσεις- Μετρήσεις

- **Μετρήσεις**

Μάζα αμαξιδίου: 693.21g

Πίνακας 5.1

Χρόνος 2 ταλαντώσεων (sec)

Ελατήρια	Μέτρηση 1	2	3	4	5	Μέση τιμή	Περίοδος (sec)	K (N/m)
Ένα	6.0	5.8	5.8	5.8	5.9	5.86	2.93	3.188
Δύο σε σειρά	8.2	8.2	8.3	8.2	8.2	8.22	4.11	1.620
Δύο παράλληλα	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.10	2.05	6.512
Με σύνδεση στα δύο άκρα	4.2	4.1	4.2	4.1	4.1	4.16	2.08	6.326

- Παρατηρήσεις

1. *Στην παράλληλη σύνδεση μεγαλώνουμε την κλίση.*
2. *Στην σύνδεση στα δύο άκρα παρατηρείται πρόβλημα λόγω ασύμμετρης σύνδεσης των 2 ελατηρίων (επειδή πάνω στη μία τρύπα βρίσκεται το πέτασμα). Το πρόβλημα δεν υπάρχει αν αφήνουμε λίγο χρόνο (≅2sec) να τρέξει πριν αρχίσουν οι μετρήσεις.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $8^{ο}$

ΠΕΙΡΑΜΑ 6: $2^{ος}$ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ NEWTON

1. <u>ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ:</u>

1.Δυναμικό αμαξίδιο με μάζα (ME-9430)

2.Τροχιά δυναμικού αμαξιδίου

3.Χρονόμετρο με διακόπτη

***Αντί της μετροταινίας και του χρονομέτρου μπορεί να χρησιμοποιηθούν αισθητήρες και το κατάλληλο λογισμικό.**

<u>ΣΚΟΠΟΣ</u>

Σκοπός είναι να δείξουμε την εξάρτηση της επιτάχυνσης ενός σώματος από την ασκούμενη σ' αυτό δύναμη και τη μάζα του.

<u>ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ</u>

1. **Με τη βοήθεια του αμαξιδίου τοποθετείστε την τροχιά σε οριζόντια θέση. Η ρύθμιση θα γίνει με τη βοήθεια των ποδιών-στηριγμάτων της τροχιάς. Η ρύθμιση γίνεται μέχρις ότου το αμαξίδιο που θα τοποθετήσουμε στην τροχιά σε ηρεμία, συνεχίζει να παραμένει ακίνητο.**
2. **Για να κάνετε καθένα από τα παρακάτω πειράματα , πιέστε το έμβολο-ελατήριο του αμαξιδίου και τοποθετείστε το αμαξίδιο σε ηρεμία στο άκρο της τροχιάς με το έμβολο να είναι απέναντι από το άκρο. Κατόπιν ελευθερώστε το έμβολο πιέζοντας το κουμπί με ένα χάρακα. Παρατηρείστε την επιτάχυνση που προκαλείται. Αυτή θα είναι μία ποιοτική μέτρηση.**

Μεταβάλετε τη δύναμη: Πραγματοποιείστε το πρώτο πείραμα με το έμβολο πιεσμένο στην πρώτη δυνατή θέση (η μικρότερη συμπίεση) και μετά κάνετε δύο επιπλέον δοκιμές αυξάνοντας τη δύναμη που εφαρμόζεται στο αμαξίδιο μεγαλώνοντας τη συμπίεση του εμβόλου.

Μεταβάλετε τη μάζα: Για όλα αυτά τα πειράματα να πιέζετε το έμβολο στο μέγιστο. Παρατηρείστε τη σχετική επιτάχυνση του αμαξιδίου (χωρίς μάζα) καθώς και με επιπρόσθετη μάζα. Εάν είναι διαθέσιμες και επιπλέον μάζες, χρησιμοποιείστε τες για να αυξήσετε τη μάζα για επιπρόσθετες δοκιμές.

<u>ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ</u>

1. Η επιτάχυνση αυξάνεται ή ελαττώνεται, όταν η δύναμη αυξάνεται;

3. **Η επιτάχυνση αυξάνεται ή ελαττώνεται όταν, όταν η μάζα αυξάνεται;**

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Από τα αποτελέσματα αυτού του πειράματος μπορείτε να εξάγετε την εξίσωση που συσχετίζει την επιτάχυνση με τη μάζα και τη δύναμη;

Παρατηρήσεις

1. ***Η άσκηση αυτή ενδείκνυται μόνο για ποιοτική ανάλυση. Για ποσοτική ανάλυση ενδείκνυται το πείραμα 7.***
2. ***Η δύναμη μεγαλώνει με μεγαλύτερη συμπίεση του ελατηρίου που υπάρχει στο αμαξίδιο.***
3. ***Οι επιπλέον μάζες να προστίθενται ομοιόμορφα.***

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9^{ο}

ΠΕΙΡΑΜΑ 7^{Ο}: 2^{ΟΣ} ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ NEWTON

<u>ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ</u>

1. **Δυναμικό αμαξίδιο (ME 9430)**
2. **Τροχαλία με σφιγκτήρα**
3. **Ελατήριο**
4. **Χρονόμετρο**
5. **Ζυγαριά**
6. **Τροχιά δυναμικού αμαξιδίου**
7. **Βάση και ράβδο στήριξης**
8. **Αναρτήρας μάζας και σετ μαζών**
9. **Ξύλινο ή μεταλλικό στοπ για το σταμάτημα**

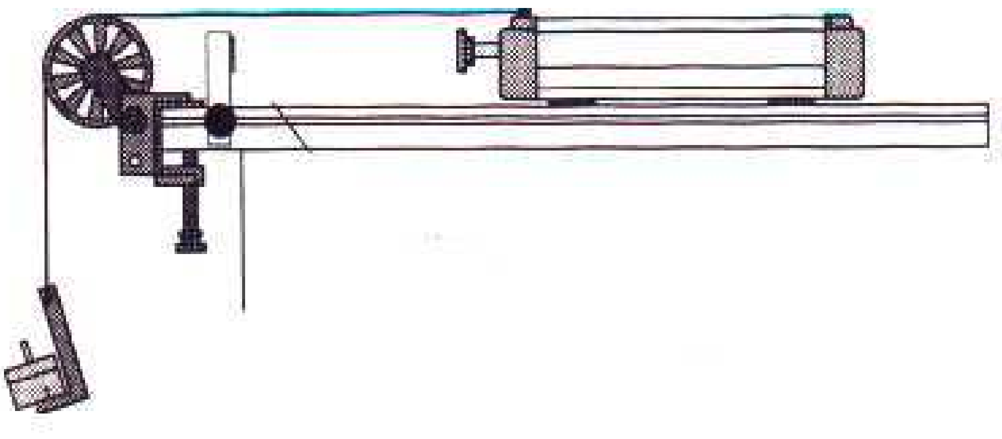
***Αντί της μετροταινίας και του χρονομέτρου μπορεί να χρησιμοποιηθούν αισθητήρες και το κατάλληλο λογισμικό.**

<u>ΣΚΟΠΟΣ</u>

Ο σκοπός της άσκησης είναι να επιβεβαιώσουμε το 2^{ο} Νόμο του Newton, F=mα.

<u>ΘΕΩΡΙΑ</u>

Σύμφωνα με το 2^{ο} Νόμο του Newton F=mα, F είναι η συνολική δύναμη που επιδρά σ' ένα σώμα μάζας m και α είναι η επιτάχυνση του σώματος (αποτέλεσμα επίδρασης της F). Για ένα αμαξίδιο μάζας m_1 πάνω σε μία οριζόντια τροχιά δεμένο μ' ένα σχοινί μέσω τροχαλίας με μάζα m_2 (βλέπε εικόνα), η δύναμη F σ' ολόκληρο το σύστημα (αμαξίδιο και αναρτημένη μάζα) είναι το βάρος της αναρτημένης μάζας, $F=m_2g$, αν θεωρήσουμε τις τριβές αμελητέες.



Σχ. 7.1 Στήσιμο εξοπλισμού

Σύμφωνα με το 2^{ο} Νόμο του Newton, αυτή η δύναμη θα είναι ίση με mα, όπου m είναι η συνολική μάζα που επιταχύνεται, η οποία στην προκειμένη περίπτωση είναι m_1+m_2. Αυτό το πείραμα θα ελέγξει αν το m_2g είναι ίσο με το $(m_1+m_2)α$ όταν αγνοείται η τριβή.

Για να αποκτήσει την επιτάχυνση , το αμαξίδιο θα ξεκινήσει από την ηρεμία. Κατόπιν θα μετρηθεί ο χρόνος που χρειάστηκε για να διανύσει την απόσταση d. Μετά, από τον τύπο $d=(1/2)αt^2$, η επιτάχυνση μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση του τύπου $α=(2d)/t^2$ (θεωρώντας το α= σταθερό)

<u>ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ</u>

1.Με την βοήθεια του αμαξιδίου τοποθετείστε την τροχιά σε οριζόντια θέση. Η ρύθμιση θα γίνει με τη βοήθεια των ποδιών-στηριγμάτων της τροχιάς . Η ρύθμιση γίνεται μέχρις ότου το αμαξίδιο που θα τοποθετήσουμε στην τροχιά σε ηρεμία, συνεχίζει να παραμένει ακίνητο.

2. Με χρήση του ζυγού να βρείτε τη μάζα του αμαξιδίου και γράψτε την στον πίνακα 7.1

3. Στερεώστε την τροχαλία στο ένα άκρο της τροχιάς όπως φαίνεται στην εικόνα. Τοποθετείστε το δυναμικό αμαξίδιο στην τροχιά, προσδέστε ένα σχοινί στην κατάλληλη υποδοχή του αμαξιδίου και ένα αναρτήρα μάζας στο άλλο άκρο του σχοινιού. Το σχοινί πρέπει να έχει τέτοιο μήκος ώστε το αμαξίδιο να κτυπά το στοπ πριν ο αναρτήρας ακουμπήσει στο πάτωμα.

4. Τραβήξτε το αμαξίδιο πίσω μέχρις ότου ο αναρτήρας ακουμπήσει την τροχαλία. Γράψτε αυτή τη θέση στην κατάλληλη θέση του πίνακα 7.1. Αυτή θα είναι η αρχική θέση για όλες τις δοκιμές. Κάνετε ένα τεστ για να προσδιορίσετε πόση μάζα χρειάζεται να τοποθετήσουμε στον αναρτήρας μάζας έτσι ώστε το αμαξίδιο να χρειαστεί 2 sec για να ολοκληρώσει την κίνηση. Εξ' αιτίας του χρόνου αντίδρασης, πολύ μικρός ολικός χρόνος κίνησης θα προκαλέσει πολύ μεγάλο σφάλμα. Αν όμως το αμαξίδιο κινείται αρκετά σιγά, η τριβή προκαλεί επίσης μεγάλο σφάλμα. Σημειώστε την αναρτημένη μάζα στον πίνακα 7.1.

5. Τοποθετήστε το αμαξίδιο στο άκρο της τροχιάς που είναι απέναντι από το στοπ της τροχαλίας και σημειώστε την τελική θέση του αμαξιδίου στον πίνακα 7.1.

6. Μετρήστε το χρόνο τουλάχιστον 5 φορές (δοκιμές) και σημειώστε τις τιμές στον πίνακα 7.1.

8. Αυξήστε τη μάζα του αμαξιδίου και επαναλάβετε τη διαδικασία.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.1

Μάζα αμαξιδ ίου	Αναρτη μένη μάζα	Δοκιμή 1	Δοκιμή] 2	Δοκιμή 3	Δοκιμή 4	Δοκιμή 5	Μέση τιμή χρόνου

Αρχική θέση=

Τελική θέση=

Συνολική απόσταση=

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

1. **Υπολογίστε τη μέση τιμή του χρόνου και σημειώστε τη στον πίνακα 7.1**
2. **Υπολογίστε τη συνολική απόσταση που διανύθηκε, με χρήση της διαφοράς ανάμεσα στις αρχικές και τις τελικές θέσεις του αμαξιδίου όπως δίνονται στον πίνακα 7.1**
3. **Υπολογίστε τις επιταχύνσεις και σημειώστε αυτές στον πίνακα 7.2**
4. **Για κάθε περίπτωση, υπολογίστε το γινόμενο μάζας επί επιτάχυνση και σημειώστε το στον πίνακα 7.2**
5. **Για κάθε περίπτωση, υπολογίστε τη συνολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα και σημειώστε την στον πίνακα 7.2**
6. **Υπολογίστε το % ποσοστό της διαφοράς ανάμεσα στη συνολική F και στο (m_1+m_2) α και σημειώστε το στον πίνακα 7.2**

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.2

Μάζα αμαξιδίου	Επιτάχυνση	(m_1+m_2)α	$F_{ολ}=m_2g$	% διαφορά

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. **Επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα του πειράματος ότι F=ma ;**
2. **Αν θεωρήσουμε δυνάμεις τριβής, ποια δύναμη περιμένετε να είναι μεγαλύτερη; Το αναρτημένο βάρος ή το γινόμενο ολικής μάζας και επιτάχυνσης; Τα αποτελέσματα αυτού του πειράματος δείχνουν καθαρά ότι η μία ήταν μεγαλύτερη από την άλλη;**

3. Γιατί η μάζα στον τύπο F=ma δεν είναι ακριβώς ίση με τη μάζα του αμαξιδίου;
4. Όταν υπολογίζετε τη δύναμη στο αμαξίδιο με χρήση του τύπου, γιατί δεν συμπεριλαμβάνεται η μάζα του αμαξιδίου;

Παρατηρήσεις-Μετρήσεις

- **Μετρήσεις**

Πίνακας 7.1

Μάζα αμαξιδίου g	Αναρτημένη μάζα	Μέτρηση 1	2	3	4	5	Μέση τιμή χρόνου
688.57	10	3.0	3.1	3.2	3.0	2.9	3.04
688.57	30	1.6	1.4	1.5	1.6	1.6	1.54

Αρχική θέση: 54

Τελική θέση: 107

Συνολική απόσταση: 53 cm

Η επιτάχυνση υπολογίζεται από τη σχέση $a = \frac{2d}{t^2}$ και οι τιμές της εμφανίζονται στον πίνακα 7.2.

Πίνακας 7.2

Μάζα αμαξιδίου (kg)	Αναρτημένημάζα (kg)	Επιτάχυνση α (m/s^2)	(m_1+m_2) (Kg)	$(m_1+m_2)α$ (N)	$F=m_2 \cdot g$ (N)	Διαφορά %
0.68857	0.010	0.115	0.69857	0.0803	0.0981	-18.14
0.68857	0.030	0.447	0.71857	0.3212	0.2943	9.14

- **Παρατηρήσεις**

1.Τα υψηλά σφάλματα οφείλονται στις τριβές και στη δυσκολία μέτρησης του χρόνου (υπάρχει χρόνος αντίδρασης σημαντικός σε σχέση με τον μετρούμενο).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10^{o}

ΠΕΙΡΑΜΑ 8: ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ

1. Δυναμικό αμαξίδιο με μάζα (ME-9430)
2. Βάση και ράβδο στήριξης (ME-9355)
3. Χρονόμετρο
4. Τροχιά δυναμικού αμαξιδίου
5. Μιλιμετρέ χαρτί

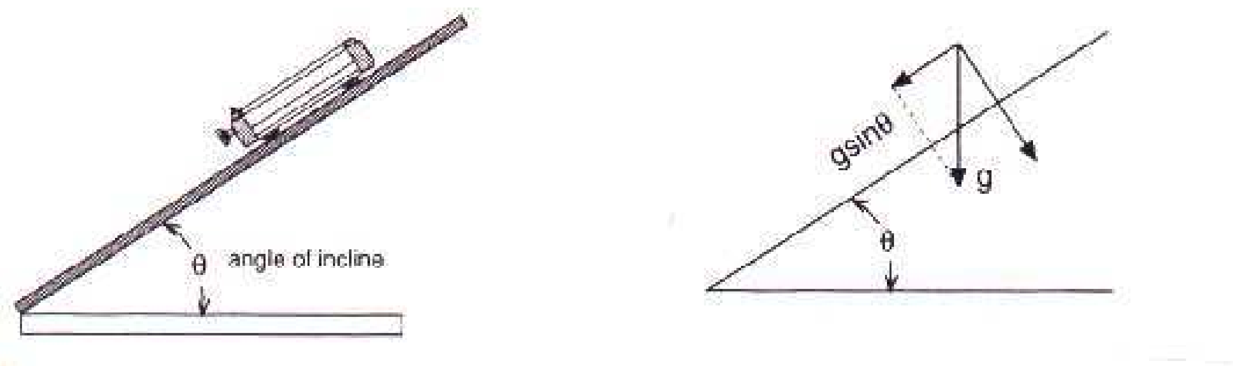
*Αντί της μετροταινίας και του χρονομέτρου μπορεί να χρησιμοποιηθούν αισθητήρες και το κατάλληλο λογισμικό.

ΣΚΟΠΟΣ

Ο σκοπός της άσκησης είναι να μελετήσουμε πώς η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο εξαρτάται από τη γωνία κλίσης του επιπέδου και να συμπεράνουμε ότι η επιτάχυνση που αποκτά το σώμα οφείλεται στη βαρύτητα.

ΘΕΩΡΙΑ

Ένα αμαξίδιο σε κεκλιμένο επίπεδο, θα κυλήσει προς τα κάτω λόγω βαρύτητας. Η επιτάχυνση που οφείλεται στη βαρύτητα είναι κατακόρυφη όπως φαίνεται στην εικόνα 8.1.

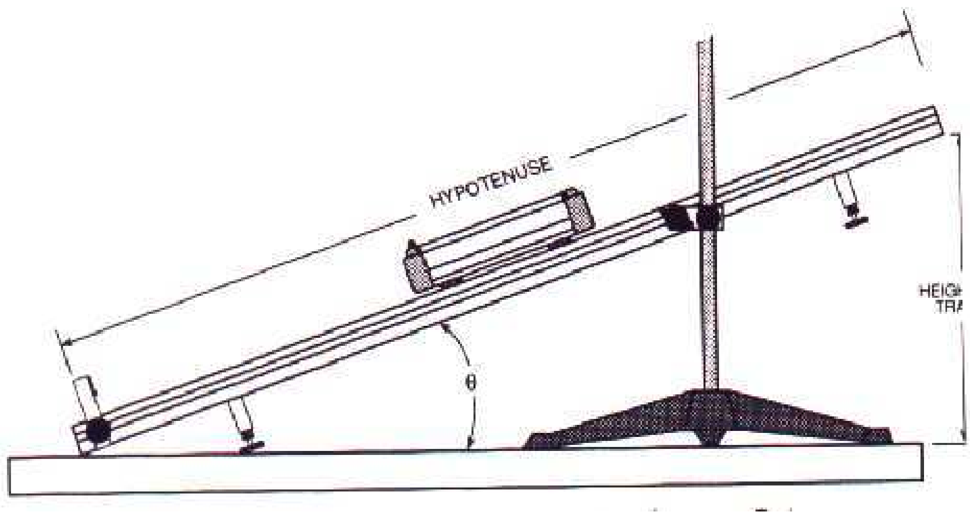


Εικ. 8.1

Η συνιστώσα της η οποία είναι παράλληλη στο επίπεδο, είναι gsinθ, έτσι αυτή είναι η επιτάχυνση του αμαξιδίου, αν αγνοήσουμε τις τριβές.

Για να μετρήσουμε την επιτάχυνση, το αμαξίδιο θα ξεκινήσει από την ηρεμία και θα μετρηθεί ο χρόνος που χρειάζεται για να διανύσει μία απόσταση d. Τότε από τον τύπο $d=(1/2)\alpha t^2$, η επιτάχυνση μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της $\alpha=(2d)/t^2$. Έτσι η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση του sinθ θα δώσει μία ευθεία με κλίση ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας.

ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ



Σχ. 8.1 Στήσιμο εξοπλισμού

1.Τοποθετήστε την τροχιά όπως φαίνεται στην εικόνα 8.2 με ανύψωση του άκρου της που δεν έχει το στοπ περίπου κατά 10 cm.

2.Τοποθετήστε το αμαξίδιο στην τροχιά στο άκρο απέναντι από το στοπ και σημειώστε αυτή την τελική θέση του στην κορυφή του πίνακα 8.1.

3.Τραβήξτε το αμαξίδιο στο πάνω άκρο της τροχιάς και σημειώστε την αρχική θέση από την οποία θα ξεκινήσει

4.Αφήστε το αμαξίδιο να ξεκινήσει από την ηρεμία και με χρήση του χρονομέτρου μετρήστε πόσο κάνει αυτό μέχρι να κτυπήσει στο στοπ. Αυτός που θα αφήσει το αμαξίδιο να ξεκινήσει, ο ίδιος πρέπει και να χρονομετρήσει. Επαναλάβετε τη μέτρηση αυτή 10 φορές (με διαφορετικό άτομο κάθε φορά να παίρνει μέτρηση). Σημειώστε όλες τις τιμές των μετρήσεων στον πίνακα 8.1.

5.Χαμηλώστε το πάνω άκρο της τροχιάς κατά 1 cm και μετρήστε το χρόνο 10 φορές.

6.Επαναλάβετε το πείραμα για ένα σύνολο 7 γωνιών, χαμηλώνοντας την τροχιά κατά 1cm για κάθε μία νέα γωνία.

ΠΙΝΑΚΑΣ 8.1

Ύψος του αμαξιδίου

Χρόνος

	10 cm	9 cm	8 cm	7 cm	6 cm	5 cm	4 cm
Δοκ 1							
Δοκ 2							
Δοκ 3 Δοκ 4							
Δοκ 5							
Δοκ 6							
Δοκ 7							
Δοκ 8							
Δοκ 9							
Δοκ 10							
Μ.Ο.							

Αρχική θέση=

Τελική θέση=

Συνολικό διάστημα=

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

1.Υπολογίστε το μέσο χρόνο για κάθε γωνία.

2. Υπολογίστε το συνολικό διάστημα που διήνυσε με χρήση της διαφοράς ανάμεσα στις αρχικές και τελικές θέσεις του αμαξιδίου, από τον πίνακα 8.1.

3. Υπολογίστε τις επιταχύνσεις χρησιμοποιώντας το διάστημα και το χρόνο. Σημειώστε τα αποτελέσματα στον πίνακα 8.2

4. Μετρήστε την υποτείνουσα του τριγώνου που σχηματίζεται από την τροχιά και υπολογίστε το ημθ για κάθε ένα από τα ύψη.

5. Σχεδιάστε την επιτάχυνση σαν συνάρτηση του ημθ. Σχεδιάστε τη βέλτιστη ευθεία και υπολογίστε την κλίση της. Αυτή η κλίση θα είναι ίση με g. Υπολογίστε την % διαφορά ανάμεσα στην κλίση και το g.

ΠΙΝΑΚΑΣ 8.2

Ύψος	Επιτάχυνση	ημθ

Υποτείνουσα=

Κλίση=

% διαφορά=

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Προκαλεί ο χρόνος αντίδρασής σας ένα μεγαλύτερο ποσοστιαίο σφάλμα για μεγαλύτερες ή μικρότερες γωνίες;
2. Αν η μάζα του αμαξιδίου διπλασιαστεί, πώς επηρεάζονται τα αποτελέσματα; Δοκιμάστε το.

Παρατηρήσεις- Μετρήσεις

- Μετρήσεις

Πίνακας 8.1

	10cm	8cm	6cm	4cm
Μέτρηση 1	1.8	2.1	2.4	3.1
2	1.7	2.2	2.5	3.0
3	1.8	2.2	2.5	2.9
4	1.9	2.3	2.6	3.0
5	2.0	2.2	2.4	3.1
6	1.9	2.3	2.5	3.1
7	1.9	2.2	2.6	3.0
8	2.0	2.1	2.5	2.9
9	1.8	2.2	2.4	3.1
10	1.8	2.2	2.5	3.1
Μέσος όρος	1.86	2.20	2.49	3.03

Αρχική θέση:40 cm

Τελική θέση:120cm

Συνολικό διάστημα:80cm

Ο υπολογισμός της α γίνεται από τη σχέση $\alpha = \frac{2d}{t^2}$ και καταχωρείται στον πίνακα 8.2.

Πίνακας 8.2

Ύψος	Επιτάχυνση	ημθ
4cm	$0.174 m/s^2$	0.0175
6cm	$0.258 m/s^2$	0.0263
8cm	$0.331 m/s^2$	0.0351
10cm	$0.462 m/s^2$	0.0439

Ο υπολογισμός του ημθ έγινε με την υποτείνουσα να είναι 228cm.

Με κατασκευή της ευθείας α=φ(ημθ) μπορούμε να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας g από την κλίση της ευθείας που σχηματίζεται. Ο προσδιορισμός αυτός μας δίνει για τις συγκεκριμένες μετρήσεις $g=10.65 m/s^2$. Η διαφορά του αποτελέσματος αυτού από την τιμή $9.81 m/s^2$ είναι 8.56%.

- **Παρατηρήσεις**

1. ***Πρέπει να ξεκινάτε με το Collect και όταν αρχίσει να παίρνει μετρήσεις θα αφήνετε το αμαξίδιο. Ο ζητούμενος χρόνος είναι η διαφορά χρόνου από το σημείο 40 στο σημείο 120.Βρίσκεται με την βοήθεια του Examine.***
2. ***Η ταλαντωτική κίνηση του πετάσματος επηρεάζει πολύ το αποτέλεσμα.***
3. ***Χρειάζεται προσοχή στη ρύθμιση του ύψους (λόγω της ύπαρξης των ποδιών της τροχιάς).***
4. ***Ο χρόνος αντίδρασης είναι σημαντικός στη μέτρηση του χρόνου (για αυτό το λόγο οι μετρήσεις πρέπει να λαμβάνονται από διάφορα πρόσωπα).***

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11^{ο}

ΠΕΙΡΑΜΑ 9^{Ο} : ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ

1. **Δυναμικό αμαξίδιο με μάζα (ME-9430)**
2. **Τροχαλία με σφιγκτήρα**
3. **Βάση και ράβδος υποστήριξης (ME-9355)**
4. **Σχοινί**
5. **Ζυγός**
6. **Τροχιά δυναμικών αμαξιδίων**
7. **Μετροταινία**
8. **Αναρτήρας μάζας και σετ μαζών (διάφορα kg)**
9. **Μιλιμετρέ χαρτί**

***Αντί της μετροταινίας και του χρονομέτρου μπορεί να χρησιμοποιηθούν αισθητήρες και το κατάλληλο λογισμικό.**

Σκοπός

9. Ο σκοπός είναι να εξετάσουμε την δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και την δυναμική βαρυτική ενέργεια και να δείξουμε πως η ενέργεια διατηρείται.

10. Θεωρία

11. Η δυναμική ενέργεια ενός συμπιεσμένου ελατηρίου κατά *X* από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τον τύπο $U = \frac{1}{2}KX^2$ όπου *K* είναι η σταθερά του ελατηρίου. Σύμφωνα με το νόμο του Χουκ η δύναμη που ασκείται από το ελατήριο είναι ανάλογη με την παραμόρφωση *X* του ελατηρίου, δηλαδή F=-*KX* όπου *K* είναι η σταθερά αναλογίας. Έτσι η σταθερά αναλογίας μπορεί να μετρηθεί πειραματικά χρησιμοποιώντας διαφορετικές δυνάμεις οι οποίες συμπιέζουν ή επιμηκύνουν το ελατήριο σε διαφορετικές παραμορφώσεις. Όταν η δύναμη παριστάνεται γραφικά σε συνάρτηση με την παραμόρφωση η κλίση της ευθείας είναι ίση με *K*.

12. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός αμαξιδίου αυξάνει όταν αυτό ανεβαίνει σε ένα κεκλιμένο επίπεδο και δίνεται από το τύπο U=mgh, όπου m είναι η μάζα του αμαξιδίου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και h είναι το

ύψος στο οποίο βρίσκεται το αμαξίδιο. Αν d η μετατόπιση του αμαξιδίου κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, το ύψος δίνεται από το τύπο h=d sinθ.

13. Εάν η ενέργεια διατηρείται η δυναμική ενέργεια του συμπιεσμένου ελατηρίου θα μετατραπεί όλη σε δυναμική βαρυτική ενέργεια.

14. ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

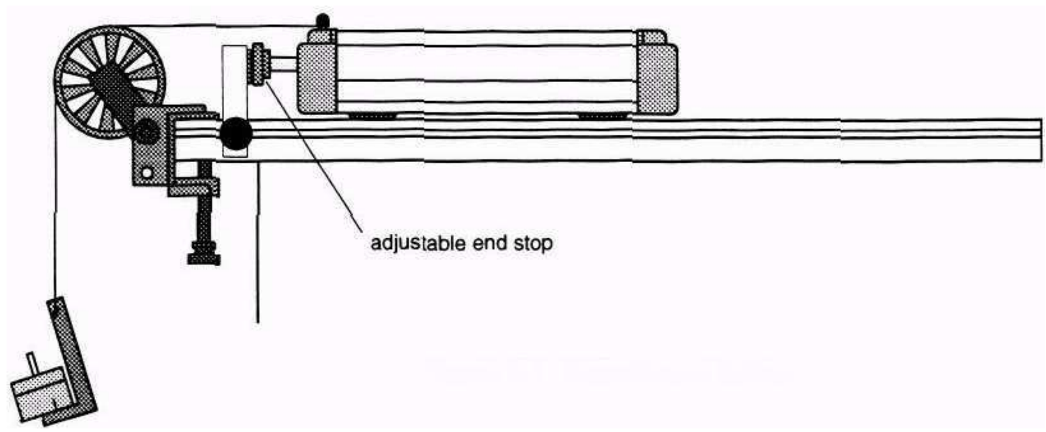
15.

1. Ρυθμίστε την τροχιά τοποθετώντας επάνω το αμαξίδιο να δείτε προς πια κατεύθυνση κινείται. Ρυθμίστε τα πόδια για να ανυψώσετε ή να χαμηλώσετε τα άκρα της τροχιάς έως ότου ένα αμαξίδιο που τοποθετείται σε ηρεμία στην τροχιά συνεχίζει να μην κινείται.
2. Χρησιμοποιήστε το ζυγό για να βρείτε τη μάζα του αμαξιδίου. Καταγράψτε την τιμή αυτή στον πίνακα 9.2

16.

17. ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΣ ΤΗ ΣΤΑΘΕΡΑ ΤΟΥ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ

3. Τοποθετήστε το αμαξίδιο στη τροχιά με το έμβολο του ελατηρίου απέναντι από το stop όπως φαίνεται στην εικόνα 9.1. Δέστε ένα σχοινί στο αμαξίδιο και μέσω της τροχαλίας δέστε το άλλο άκρο του σχοινιού στον «αναρτήρα» της μάζας.
4. Καταγράψτε την θέση του αμαξιδίου στον πίνακα 9.1.
5. Προσθέστε μια μάζα στον αναρτήρα μάζας. Απελευθερώστε το έμβολο χτυπώντάς το με ένα χάρακα και καταγράψτε την νέα θέση. Επαναλάβατε αυτό για 5 διαφορετικές μάζες.



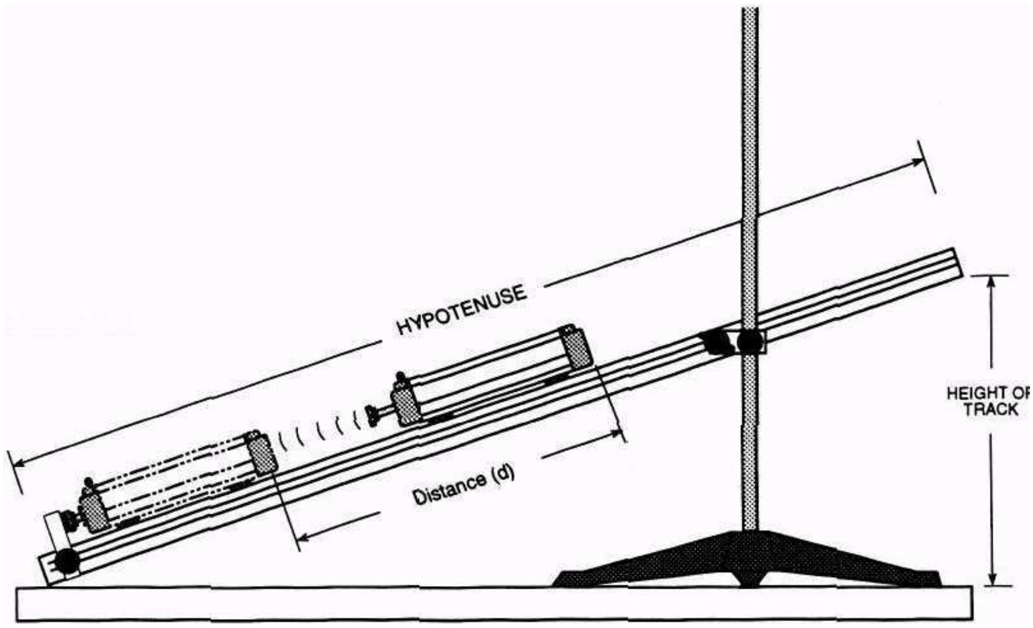
Σχ. 9.1 Στήσιμο εξοπλισμού

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.1

Πρόσθετη μάζα	*Θέση*	Μετατόπιση από την ισορροπία	*Δύναμη*

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

6. Απομακρύνετε τα ρυθμιστικά πόδια.



Σχ. 9.2 Στήσιμο εξοπλισμού

7. Απομακρύνετε τον σπάγκο από το αμαξίδιο και οπλίστε το έμβολο στη μέγιστη θέση συμπίεσης. Τοποθετείστε το αμαξίδιο στο κάτω άκρο της τροχιάς.

Μετρείστε την απόσταση που το έμβολο του ελατηρίου είναι συμπιεσμένο και καταγράψτε αυτή την τιμή στον πίνακα 9.2

8. **Δώστε κλίση στην τροχιά και μετρήστε το ύψος της και την υποτείνουσα για να υπολογίσετε την γωνία κλίσης.** ***γωνία =τοξ ημ*** $\left(\frac{\upsilon\psi o\varsigma}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\iota\nu o\upsilon\sigma\alpha}\right)$**. Καταγράψτε τη γωνία στον πίνακα 9.9**
9. **Καταγράψτε την αρχική θέση του αμαξιδίου στον πίνακα 9.2**
10. **Απελευθερώστε το έμβολο χτυπώντάς το με ένα χάρακα και καταγράψτε την απόσταση που ανέβηκε το αμαξίδιο. Επαναλάβατε αυτό πέντε φορές. Καταγράψτε την μέγιστη απόσταση που ανέβηκε το αμαξίδιο στον πίνακα 9.2**
11. **Αλλάξτε την γωνία κλίσης και επαναλάβατε τις μετρήσεις.**
12. **Πρόσθεσε μάζες στο αμαξίδιο και επαναλάβατε τις μετρήσεις.**

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.2

Απόσταση κίνησης του αμαξιδίου (d)

Γωνία	**Μάζα**	***Πείραμα 1***	**2**	**3**	**4**	**5**	**Μέγιστη**	**h=dsinθ**

Παραμόρφωση (συμπίεση ελατηρίου)(χ)=-------------------------

Αρχική θέση αμαξιδίου=-----------------------

Ανάλυση δεδομένων

1. **Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα 9.1, κάντε την γραφική παράσταση της δύναμης σε συνάρτηση με την παραμόρφωση. Σχεδιάστε την βέλτιστη ευθεία και υπολογίστε την κλίση της ευθείας. Η κλίση είναι ίση με τη σταθερά του ελατηρίου, *Κ*.**

2. Υπολογίστε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και καταγράψτε την στον πίνακα 9.3

3. Υπολογίστε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια για κάθε περίπτωση και καταγράψτε την στον πίνακα 9.3

4. Υπολογίστε την επί τοις εκατό διαφορά μεταξύ της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου και της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

Πίνακας 9.3

Γωνία / μάζα	Ελατηρίου U (1/2 KX^2)	Βαρυτική U (mgh)	% Διαφορά

Ερωτήσεις

1. Ποια δυναμική ενέργεια είναι μεγαλύτερη; Που οφείλεται αυτή η διαφορά;

2. Όταν η μάζα του αμαξιδίου διπλασιάζεται, τι παρατηρείτε για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια;

Παρατηρήσεις- Μετρήσεις

- Μετρήσεις

Πίνακας 9.1

Προστιθέμενη μάζα (g)	Μετατόπιση από ισορροπία (m)	Δύναμη(mg) (N)
60	0.0010	0.5886
120	0.0021	1.1772
200	0.0036	1.9620
300	0.0054	2.9430
500	0.0089	4.9050

Με κατασκευή της ευθείας F = f(x) μπορούμε να προσδιορίσουμε την σταθερά του ελατηρίου K. Έτσι βρίσκουμε K=546.24N/m.

Πίνακας 9.2

Απόσταση που διανύει το αμαξίδιο

Γωνία (μοίρες)	Μάζα (g)	1 (m)	2 (m)	3 (m)	4 (m)	5 (m)	Max (m)	h=dημθ (m)
3.65	688.57	0.47	0.46	0.48	0.48	0.47	0.48	0.0306
3.65	1178.46	0.28	0.30	0.29	0.30	0.29	0.30	0.0191
4.40	688.57	0.41	0.40	0.40	0.42	0.41	0.42	0.0322
4.40	1178.46	0.23	0.24	0.22	0.25	0.25	0.25	0.0192
5.41	688.57	0.35	0.36	0.35	0.35	0.36	0.36	0.0339
5.41	1178.46	0.19	0.18	0.18	0.20	0.19	0.20	0.0188

Παραμόρφωση του ελατηρίου: 3cm

Πίνακας 9.3

Γωνία /Μάζα Μοίρες /g	Δυναμική ενέργεια ελατηρίου($1/2K\chi^2$) (J)	Βαρυτική ενέργεια(mgh) (J)	Διαφορά %
3.65/688.57	0.246	0.207	-15.85
3.65/1178.46	0.246	0.221	-10.16
4.40/688.57	0.246	0.217	-11.79
4.40/1178.46	0.246	0.222	- 9.76
5.41/688.57	0.246	0.229	- 6.91
5.41/1178.46	0.246	0.218	-11.38

- **Παρατηρήσεις**

1.Η μέτρηση της γωνίας μπορεί να γίνει με την βοήθεια μοιρογνωμονίου ή μέτρησης του ύψους και του μήκους της τροχιάς όπως στο σχήμα 9.2.

2.Η ύπαρξη τριβών μειώνει αισθητά την μετατόπιση του αμαξιδίου.

3.Η μάζα που προστέθηκε ήταν 489.89 g.

4.Στον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας χρησιμοποιήθηκε η τιμή g=9,81 m/s^2

5.Οι μετρήσεις της παραμόρφωσης του ελατηρίου περιέχουν μεγάλο σφάλμα, αφού είναι της τάξης των λίγων mm και οι ενδείξεις του αισθητήρα είναι της ίδιας τάξης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1ο

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΙΣ ΚΡΟΥΣΕΙΣ

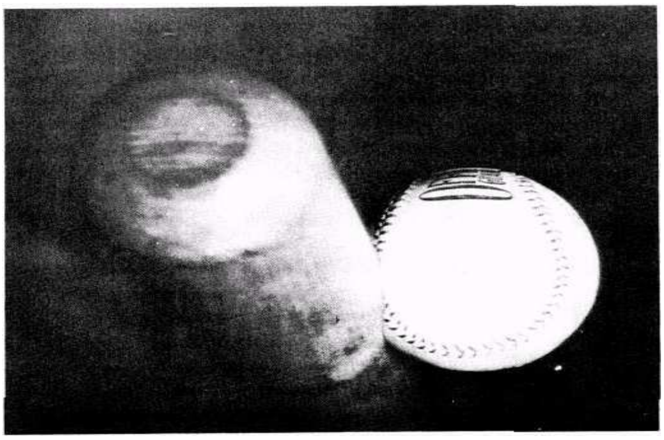
ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Τι είναι μια κρούση

Μαθαίνουμε αρκετά πράγματα για τα ατομικά, πυρηνικά και στοιχειώδη σωμάτια πειραματικά, παρατηρώντας τις μεταξύ τους συγκρούσεις. Με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας και της ορμής σε κρούσεις σωματίων μπορούμε να καταλήξουμε σε πλήθος χρήσιμων συμπερασμάτων.

Σε μια κρούση εξασκείται μια σχετικά μεγάλη δύναμη πάνω σε κάθε συγκρουόμενο σωμάτιο, για ένα σχετικά μικρό χρόνο. Η ουσία μιας "κρούσης" είναι το ότι η κίνηση των συγκρουόμενων σωματίων (ή τουλάχιστο ενός απ' αυτά) μεταβάλλεται μάλλον απότομα και ότι μπορούμε να κάνουμε ένα σχετικά σαφή διαχωρισμό των χρόνων "πριν από την κρούση" και αυτών "μετά την κρούση".

Για παράδειγμα όταν το ρόπαλο χτυπά την μπάλα του *baseball,* , η αρχή και το τέλος της κρούσης μπορούν να προσδιοριστούν με αρκετή ακρίβεια. Το ρόπαλο βρίσκεται σ' επαφή με τη μπάλα για ένα διάστημα πού είναι αρκετά μικρό σε σχέση με το χρόνο πού παρακολουθούμε την μπάλα. Στη διάρκεια της κρούσης το ρόπαλο εξασκεί μια μεγάλη δύναμη πάνω στην μπάλα (Σχ. 1). Η δύναμη αυτή μεταβάλλεται χρονικά με ένα πολύπλοκο τρόπο πού μπορούμε να προσδιορίσουμε πολύ δύσκολα. Τόσο η μπάλα όσο και το ρόπαλο παραμορφώνονται στη διάρκεια της κρούσης.



Σχ. 1 Μια, μεγάλης ταχύτητας, φωτογραφία ενός ρόπαλου που χτυπά μια μπάλα του baseball. Παρατηρούμε την παραμόρφωση της μπάλας, που δείχνει το τεράστιο μέγεθος της δύναμης τη στιγμή αυτή.

Όταν ένα σωμάτιο άλφα *(He^4)* "συγκρούεται" με ένα πυρήνα χρυσού (Au^{197}), η δύναμη που εξασκείται μεταξύ τους μπορεί να είναι η γνωστή απωστική ηλεκτροστατική δύναμη, που συνδέεται με τα φορτία των σωματίων. Τα σωμάτια μπορεί να μην έλθουν σε επαφή μεταξύ τους, αλλά εξακολουθούμε να μιλάμε για "κρούση" επειδή η ισχυρή δύναμη, πού δρα για ένα χρόνο μικρό σε σχέση με το χρόνο πού παρατηρούμε το σωμάτιο άλφα, έχει μια σημαντική επίδραση πάνω στην κίνηση του σωματίου άλφα.

Μπορούμε να διευρύνουμε την έννοια της κρούσης για να περιλάβει φαινόμενα (πού συνήθως λέγονται α ν τ ι δ ρ ά σ ε ι ς) στα οποία οι ταυτότητες των αντιδρώντων σωματίων μεταβάλλονται στη διάρκεια του φαινομένου ή ακόμη την αυθόρμητη διάσπαση ενός μόνου σωματίου σε δυο ή περισσότερα άλλα σωμάτια. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η διάσπαση του στοιχειώδους σωματίου που λέγεται σ ω μ ά τ ι ο σ ί γ μ α σε δυο άλλα σωμάτια, το πιόνιο και το ν ε τ ρ ό ν ι ο ή

$$\Sigma^- \rightarrow \pi^- + \eta$$

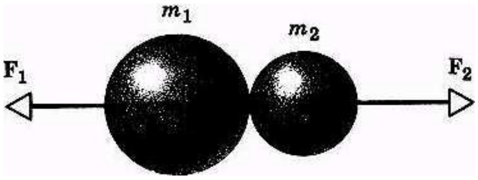
Οι αρχές διατήρησης εφαρμόζονται σ' όλα αυτά τα παραδείγματα

Παρ' όλο που δεν έρχονται σ' επαφή δυο σώματα στη διαδικασία αυτή (εκτός αν τη δούμε αντίστροφα), έχει πολλά κοινά χαρακτηριστικά με τις κρούσεις : (1) υπάρχει μια σαφής διάκριση μεταξύ του "πριν απ' το γεγονός" και του "μετά το γεγονός" και (2) οι νόμοι διατήρησης της ορμής και ενέργειας μας επιτρέπουν να μάθουμε πολλά για τέτοιες διαδικασίες, μελετώντας τις "πριν" και "μετά" καταστάσεις, παρ' όλο που μπορεί να ξέρουμε λίγα πράγματα για τους νόμους δυνάμεων που ισχύουν στη διάρκεια αυτού του ίδιου του "γεγονότος".

Στη μελέτη των κρούσεων ο σκοπός μας είναι ο εξής: όταν δοθούν οι πληροφορίες (αρχικές συνθήκες) για τις κινήσεις των συγκρουόμενων σωματίων, να βγάλουμε συμπεράσματα για τις τελικές κινήσεις από τις αρχές διατήρησης της ορμής και ενέργειας, υποθέτοντας ότι δεν ξέρουμε τίποτα για τις δυνάμεις πού δρουν στη διάρκεια της κρούσεως.

Διατήρηση της ορμής στις κρούσεις

Θεωρούμε τώρα μια κρούση ανάμεσα σε δυο σωμάτια, με μάζες m, και m_2, όπως αυτά που φαίνονται στο Σχ. 2. Στη μικρή διάρκεια της κρούσης τα σωμάτια αυτά εξασκούν μεταξύ τους μεγάλες δυνάμεις. Σε κάθε στιγμή έχουμε τις δυνάμεις F_1, που εξασκεί το σωμάτιο 2 πάνω στο σωμάτιο 1 και F_2, που εξασκεί το σωμάτιο 1 πάνω στο σωμάτιο 2. Από τον τρίτο νόμο του *Newton* οι δυνάμεις αυτές έχουν, σε κάθε στιγμή, το ίδιο μέτρο αλλά αντίθετη φορά.



Σχ . 2 Δυο "σωμάτια" m, και m_2 σε μια κρούση που δέχονται ίσες κατά μέτρο αλλά αντίθετης φοράς δυνάμεις κατά μήκος της διακέντρου τους, σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton $\vec{F}_1(t) = -\vec{F}_2(t)$

Η μεταβολή της ορμής του σωματίου 1 που προέρχεται από την κρούση είναι

$$\Delta P_1 = \int_{t_i}^{t_f} F_1 dt = \bar{F}_1 \Delta t$$

όπου $\bar{F}_1$ είναι η μέση τιμή της δύναμης F_1, στη διάρκεια της κρούσης Δt= $t_f - t_i$

Η μεταβολή της ορμής του σωματίου 2 που προέρχεται από την κρούση είναι

$$\Delta P_2 = \int_{t_i}^{t_f} F_2 dt = \bar{F}_2 \Delta t$$

όπου $\bar{F}_2$ είναι ή μέση τιμή της δύναμης F_2 στη διάρκεια της κρούσης Δt= $t_f - t_i$

Αν πάνω στα σωμάτια δεν ενεργούν άλλες δυνάμεις, τότε οι ΔP_1, και ΔP_2 δίνουν την ολική μεταβολή της ορμής για κάθε σωμάτιο. Έχουμε όμως δει ότι σε κάθε στιγμή $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ και έτσι $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$ και άρα

$$\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$$

Αν θεωρήσουμε τα δυο σωμάτια σαν ένα απομονωμένο σύστημα, η ολική ορμή του συστήματος είναι

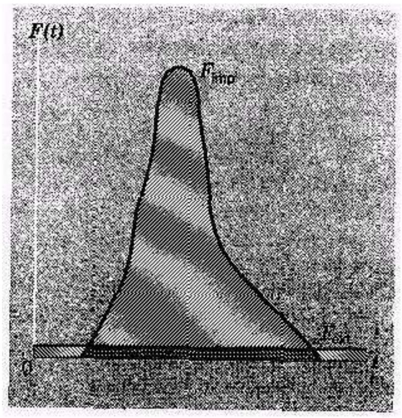
$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

και η ολική μεταβολή της ορμής του συστήματος σαν αποτέλεσμα της κρούσης είναι μηδέν, δηλαδή

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{P}_1 + \Delta\vec{P}_2 = 0$$

Άρα, αν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, η ολική ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται από την κρούση. Οι δυνάμεις που δρουν στη διάρκεια της κρούσης είναι εσωτερικές δυνάμεις που δεν επηρεάζουν την ολική ορμή του συστήματος,

Έχουμε ορίσει την κρούση σα μια αλληλεπίδραση πού συμβαίνει μέσα σε χρόνο Δt, αμελητέο σε σύγκριση με τη διάρκεια παρατήρησης του συστήματος. Μπορούμε επίσης να χαρακτηρίσουμε την κρούση σαν ένα γεγονός στο οποίο οι εξωτερικές δυνάμεις, που πιθανόν να δρουν πάνω στο σύστημα, είναι αμελητέες σε σχέση με τις ωστικές δυνάμεις της κρούσης. Όταν ένα μπαστούνι χτυπά μια μπάλα του *baseball,* ένα ρόπαλο χτυπά μια μπάλα του *golf,* ή μια μπάλα του μπιλιάρδου χτυπά μιαν άλλη, πάνω στο σύστημα εξασκούνται εξωτερικές δυνάμεις.



Σχ. 3 Σε μια κρούση, η ωστική δύναμη F_{imp} είναι γενικά πολύ μεγαλύτερη απ' οποιαδήποτε εξωτερική δύναμη F_{ext}, που πιθανόν να εξασκείται πάνω στο σύστημα.

Η βαρύτητα ή η τριβή, για παράδειγμα, εξασκεί δυνάμεις πάνω σ' αυτά τα σώματα. Αυτές οι εξωτερικές δυνάμεις πιθανόν να μην είναι οι ίδιες πάνω σε κάθε συγκρουόμενο σώμα, ούτε αναγκαστικά εξουδετερώνονται από άλλες εξωτερικές δυνάμεις. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να αγνοήσουμε αυτές τις εξωτερικές δυνάμεις στη διάρκεια της κρούσης και να υποθέσουμε τη διατήρηση της ορμής, θεωρώντας ότι οι εξωτερικές δυνάμεις είναι αμελητέες σε σύγκριση προς τις δυνάμεις της κρούσης. Έτσι η μεταβολή της ορμής ενός σωματίου στη διάρκεια της κρούσης, που προκύπτει από εξωτερικές δυνάμεις, είναι αμελητέα σε σύγκριση με τη μεταβολή της ορμής του σωματίου αυτού που προκύπτει από τις ωστικές κρουστικές δυνάμεις (Σχ 3).

Για παράδειγμα, όταν ένα μπαστούνι χτυπά μια μπάλα του *baseball,* η κρούση διαρκεί μόνο για ένα μικρό κλάσμα του δευτερόλεπτου. Αφού η μεταβολή της ορμής είναι μεγάλη και ο χρόνος της κρούσεως μικρός, προκύπτει από την

$$\Delta P = \bar{F}\,\Delta t$$

ότι ή μέση δύναμη F είναι μεγάλη. Συγκρινόμενη με τη δύναμη αυτή, η εξωτερική δύναμη της βαρύτητας είναι αμελητέα. *Στη διάρκεια της κρούσης* μπορούμε ασφαλώς να αγνοήσουμε την εξωτερική αυτή δύναμη στον προσδιορισμό της μεταβολής της κινήσεως της μπάλας. Όσο πιο λίγο διαρκεί η κρούση τόσο σωστότερο είναι αυτό.

Στην πράξη, λοιπόν, *μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατηρήσεως της ορμής στις κρούσεις(αμέσως πριν ,αμέσως μετά), αν ο χρόνος της κρούσης είναι αρκετά μικρός*. Μπορούμε τότε να πούμε ότι η ορμή ενός συστήματος σωματίων, αμέσως πριν συγκρουστούν τα σωμάτια, ισούται προς την ορμή του συστήματος αμέσως μετά τη σύγκρουση των σωματίων.

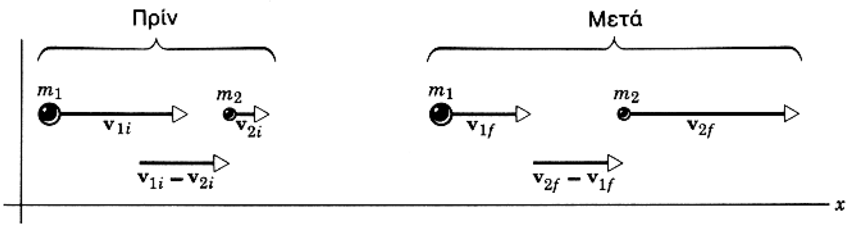
Κρούσεις σε μια διάσταση

Μπορούμε πάντοτε να προσδιορίσουμε τις κινήσεις των σωμάτων μετά την κρούση από τις κινήσεις τους πριν από την κρούση, αν ξέρουμε τις δυνάμεις πού εξασκούνται στη διάρκεια της κρούσης και αν μπορούμε να λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης. Συνήθως όμως δεν γνωρίζουμε αυτές τις δυνάμεις. Παρ' όλο που είναι πιθανό να μη γνωρίζουμε τις λεπτομέρειες της αλληλεπίδρασης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αρχές διατήρησης της ολικής ενέργειας και της ορμής σε πολλές περιπτώσεις για να προβλέψουμε τα αποτελέσματα της κρούσης.

Οι κρούσεις ταξινομούνται συνήθως, σύμφωνα με το αν διατηρείται ή όχι στην κρούση ή κινητική ενέργεια. Όταν διατηρείται η κινητική ενέργεια λέμε ότι η κρούση είναι ελαστική. Αλλιώς η κρούση λέγεται ανελαστική. Κρούσεις μεταξύ ατομικών, πυρηνικών και στοιχειωδών σωματίων είναι μερικές φορές ελαστικές. Στην πραγματικότητα, αυτές είναι οι μόνες αληθινά ελαστικές κρούσεις πού ξέρουμε. Οι κρούσεις μεταξύ των μεγάλων σωμάτων είναι πάντοτε ανελαστικές. Μπορούμε όμως συχνά να θεωρούμε τέτοιες κρούσεις προσεγγιστικά ελαστικές, όπως για παράδειγμα, κρούσεις μεταξύ σφαιρών από ελεφαντόδοντο ή γυαλί. Όταν δυο σώματα κολλούν μεταξύ τους μετά την κρούση, η κρούση λέγεται τελείως ανελαστική ή πλαστική. Για παράδειγμα, η κρούση μεταξύ ενός βλήματος και του στόχου του είναι τελείως ανελαστική, όταν το βλήμα παραμένει σφηνωμένο μέσα στο στόχο. Η κινητική ενέργεια του συστήματος στην πλαστική κρούση δεν διατηρείται και ένα μέρος της μετατρέπεται κατά την κρούση σε θερμική ενέργεια και σε δυναμική ενέργεια μόνιμης παραμόρφωσης.

Ας θεωρήσουμε μια ελαστική μονοδιάστατη κρούση. Μπορούμε να φανταστούμε δυο λείες σφαίρες, πού δεν περιστρέφονται, να κινούνται αρχικά πάνω στη διάκεντρό τους, ακολούθως να συγκρούονται μετωπικά και να κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία γραμμή μετά την κρούση, χωρίς να περιστρέφονται (βλέπε Σχ, 4). Τα σώματα αυτά εξασκούν δυνάμεις μεταξύ τους στη διάρκεια της κρούσης, που έχουν τη διεύθυνση της αρχικής ευθείας κινήσεως και έτσι η τελική κίνηση γίνεται επίσης πάνω στην ίδια ευθεία.

Οι μάζες των σφαιρών είναι m_1 και m_2 ενώ οι ταχύτητας είναι v_{1i} και v_{2i}, πριν από την κρούση και v_{1f} και v_{2f} μετά απ' αυτήν.



Σχ .4 Δύο σφαίρες; πριν και μετά από μια ελαστική κρούση. Ή ταχύτητα, v_{1i}-v_{2i} της m_1 ως προς την m_2, πριν από την κρούση, ισούται προς την ταχύτητα, v_{2f} - v_{1f} της m_2 ως προς την m_1, μετά από την κρούση.

Παίρνουμε σα θετική φορά της ορμής και της ταχύτητας εκείνη προς τα δεξιά. Υποθέτουμε, εκτός κι αν δηλώσουμε το αντίθετο, ότι οι ταχύτητες των συγκρουόμενων σωματίων είναι αρκετά μικρές ώστε να μη χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τις σχετικιστικές εκφράσεις για την ορμή και την κινητική ενέργεια. Τότε από τη διατήρηση της ορμής παίρνουμε

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \quad (1)$$

Αφού η κρούση είναι ελαστική, η κινητική ενέργεια διατηρείται και παίρνουμε

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \quad (2)$$

Αμέσως φαίνεται πώς, αν ξέρουμε τις μάζες και τις αρχικές ταχύτητες, μπορούμε να υπολογίσουμε τις δυο τελικές ταχύτητες v_{1f} και v_{2f} από τις δυο αυτές εξισώσεις. Η εξίσωση της ορμής μπορεί να γραφτεί σαν

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad (3)$$

και η εξίσωση της ενέργειας μπορεί να γραφτεί σαν

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \quad (4)$$

Διαιρώντας την Εξ. 4 με την Εξ. 3 και υποθέτοντας ότι $v_{2f} \neq v_{2i}$ και $v_{1f} \neq v_{1i}$, παίρνουμε

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

ή

$$v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f} \qquad (5)$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι σε μια ελαστική μονοδιάστατη κρούση, η σχετική ταχύτητα πριν από την κρούση, ισούται προς τη σχετική ταχύτητα μετά από την κρούση.

Από την Εξ. 5 βρίσκουμε

$$v_{2f} = v_{1i} + v_{1f} - v_{2i}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. 3 και λύνοντας ως προς v_{1f} βρίσκουμε ότι

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

'Ομοίως, εισάγοντας την $v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} - v_{1i}$ (από την Εξ. 5) στην Εξ. 3 και λύνοντας ως προς v_{2f}, παίρνουμε

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

Υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις με ειδικό ενδιαφέρον. Για παράδειγμα, όταν τα συγκρουόμενα σωμάτια έχουν την ίδια μάζα, ($m_1=m_2$). Τότε οι δυο προηγούμενες εξισώσεις γράφονται:

$$V_{1f} = v_{2i} \quad \text{και} \quad v_{2f} = v_{1i}$$

Δηλαδή, σε μια μονοδιάστατη ελαστική κρούση δυο σωματίων ίσης μάζας, τα σωμάτια απλώς ανταλλάσσουν τις ταχύτητες τους στη διάρκεια της κρούσης.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση όταν το ένα σωμάτιο π.χ. το m_2 αρχικά είναι ακίνητο. Τότε ή v_{2i} είναι μηδέν και

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i}$$

Βέβαια, αν επιπλέον $m_1 = m_2$, τότε $v_{1f}=0$ και $v_{2f} = v_{1i}$ όπως περιμένουμε. Το πρώτο σωμάτιο μένει ακίνητο και το δεύτερο κινείται με την ταχύτητα που

είχε αρχικά το πρώτο. Αν όμως η m_2 είναι πολύ μεγαλύτερη από την m_1, παίρνουμε

$$V_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{και} \quad v_{2f} \approx 0$$

Δηλαδή, όταν ένα ελαφρύ σωμάτιο συγκρουστεί με ένα πολύ πιο βαρύ σωμάτιο που ηρεμεί, η ταχύτητα του ελαφριού σωματίου περίπου αντιστρέφεται και το βαρύ σωμάτιο παραμένει σχεδόν ακίνητο. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι ρίχνουμε μια μπάλα κατακόρυφα πάνω σε μία οριζόντια επιφάνεια στερεωμένη στη γη. Αυτή στην ουσία είναι μια κρούση μεταξύ της μπάλας και της γης. Αν η κρούση είναι ελαστική, η μπάλα θα αναπηδήσει με αντίθετη ταχύτητα και θα φτάσει στο ίδιο ύψος από το όποιο έπεσε.

Μια τελευταία περίπτωση έχουμε όταν η m_2 είναι πολύ μικρότερη από την m_1, τότε παίρνουμε:

$$V_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{και} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}$$

Αυτές σημαίνουν πως η ταχύτητα του σωματίου με την πολύ μεγαλύτερη μάζα , στην ουσία δεν μεταβάλλεται από την κρούση με το μικρής μάζας σωμάτιο. Το μικρής μάζας όμως σωμάτιο κινείται με περίπου διπλάσια ταχύτητα από εκείνη που αρχικά είχε.

Τα νετρόνια πού παράγονται σ' ένα αντιδραστήρα, από τη σχάση των ατόμων ουρανίου, κινούνται πολύ γρήγορα και πρέπει να επιβραδυνθούν αν πρόκειται, να προκαλέσουν άλλες σχάσεις. Υποθέτοντας ότι κάνουν ελαστικές κρούσεις με τους ακίνητους πυρήνες, τι υλικό πρέπει να εκλεγεί για να επιβραδύνει τα νετρόνια στον αντιδραστήρα; Μπορούμε να απαντήσουμε λαμβάνοντας υπ’ όψιν τα παραπάνω. Αν οι ακίνητοι στόχοι ήταν βαρείς πυρήνες, όπως του μολύ6δου, τα νετρόνια απλώς θα αναπηδούσαν προς τα πίσω με την ίδια πρακτικά ταχύτητα που είχαν αρχικά. Αν οι ακίνητοι πυρήνες ήσαν πάρα πολύ ελαφρότεροι από τα νετρόνια, όπως τα ηλεκτρόνια, τα νετρόνια θα συνέχιζαν με την ίδια πρακτικά ταχύτητα που είχαν αρχικά. Αν όμως οι ακίνητοι στόχοι είναι σωμάτια της ίδιας περίπου μάζας, τα νετρόνια σχεδόν θα σταματήσουν μετά από μια (μετωπική) σύγκρουση μαζί τους. Άρα το υδρογόνο, του οποίου ο πυρήνας (πρωτόνιο) έχει σχεδόν την ίδια μάζα με το νετρόνιο πρέπει να είναι το πιο αποτελεσματικό. Και άλλοι λόγοι επηρεάζουν την εκλογή ενός επιβραδυντή νετρονίων, όσον άφορα όμως την ενέργεια και την ορμή μόνο αυτοί μας περιορίζουν την εκλογή στα ελαφρότερα στοιχεία.

Αν τώρα μια κρούση *είναι* α ν ε λ α σ τ ι κ ή , εξ ορισμού, η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται. Η τελική κινητική ενέργεια είναι μικρότερη από την αρχική.

Η διαφορά μετατρέπεται τελικά σε θερμική ενέργεια ή σε δυναμική ενέργεια παραμορφώσεως κατά την κρούση. Σε κάθε περίπτωση, η διατήρηση της ορμής εξακολουθεί να ισχύει όπως και η διατήρηση της ολ ι κ ή ς ενέργειας.

Ας θεωρήσουμε τέλος μια τ ε λ ε ί ω ς α ν ε λ α σ τ ι κ ή (π λ α σ τ ι κ ή) κρούση. Τα δυο σωμάτια ενώνονται μετά την κρούση και έτσι υπάρχει μια τελική κοινή ταχύτητα v_f. Δεν είναι ανάγκη να περιοριστεί η συζήτηση σε μονοδιάστατη κίνηση. Χρησιμοποιώντας μόνο την αρχή διατήρησης της ορμής, βρίσκουμε

$$m_1\vec{V}_{1i} + m_2\vec{V}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{V}_f \quad (6)$$

Αυτή δίνει την v_f όταν οι v_{1i} και v_{2f} είναι γνωστές.

Κρούσεις σε δυο και τρεις διαστάσεις

Σε δυο και τρεις διαστάσεις (εκτός της τελείως ανελαστικής κρούσης) οι νόμοι διατήρησης μόνοι τους δεν μπορούν να μας καθορίσουν την κίνηση των σωματίων μετά την κρούση, αν ξέρουμε την κίνηση πριν από την κρούση. Για παράδειγμα, σε μια δισδιάστατη ελαστική κρούση, που είναι και η απλούστερη περίπτωση, έχουμε τέσσερις αγνώστους, δηλαδή τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας κάθε σωματίου μετά από την κρούση. Έχουμε όμως μόνο τρεις γνωστές σχέσεις μεταξύ τους, μια για τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας και μια για τη διατήρηση της ορμής σε κάθε μια από τις δύο διαστάσεις. Άρα χρειαζόμαστε περισσότερες πληροφορίες και όχι απλώς τις αρχικές συνθήκες. Όταν δεν ξέρουμε τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης όπως συχνά συμβαίνει, οι επιπρόσθετες πληροφορίες πρέπει να ληφθούν από το πείραμα.

Ας δούμε τι συμβαίνει όταν ένα σωμάτιο εκτοξεύεται προς ένα σωμάτιο-στόχο πού ηρεμεί. Η περίπτωση αυτή δεν είναι τόσο ειδική, όσο πιθανό να φαίνεται, γιατί πάντοτε μπορούμε να διαλέξουμε *ένα* σύστημα αναφοράς στο οποίο το σωμάτιο-στόχος να ηρεμεί πριν από την κρούση. Σε πολλά πειράματα της πυρηνικής φυσικής εκτοξεύονται πυρηνικά σωμάτια προς ένα στόχο που ηρεμεί στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Η αρχική κίνηση δεν γίνεται αναγκαστικά πάνω στη διάκεντρο των σωματίων. Η δύναμη αλληλεπίδρασης μπορεί να είναι ηλεκτρομαγνητική (στην οποία περιλαμβάνουμε και τις δυνάμεις "επαφής", βαρύτητας ή πυρηνική. Ισχυρές δυνάμεις, πού δρουν σε σχετικά μικρές αποστάσεις προσεγγίσεως και για μικρό χρόνο σε σχέση με το χρόνο παρατηρήσεως, εκτρέπουν τα σωμάτια από την αρχική πορεία τους.

Μια τυπική κατάσταση δείχνεται στο Σχ. 5. Η απόσταση *b* μεταξύ της αρχικής γραμμής κινήσεως και μιας γραμμής παράλληλης προς αυτή, πού περνά από το κέντρο του στόχου λέγεται π α ρ ά μ ε τ ρ ο ς κ ρ ο ύ σ η ς. Το *b=0* αντιστοιχεί σε μια μετωπική κρούση. Η διεύθυνση της κινήσεως του προσπίπτοντος σωματίου m_1 μετά την κρούση σχηματίζει μια γωνία θ_1, με την αρχική διεύθυνση και ο στόχος m_2, πού αρχικά ηρεμεί, κινείται μετά την κρούση σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ_2 με την αρχική διεύθυνση του προσπίπτοντος βλήματος. Εφαρμόζοντας τη διατήρηση της ορμής, που είναι μια διανυσματική σχέση, παίρνουμε δύο βαθμωτές εξισώσεις. Για την *χ* συνιστώσα της κινήσεως έχουμε

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$

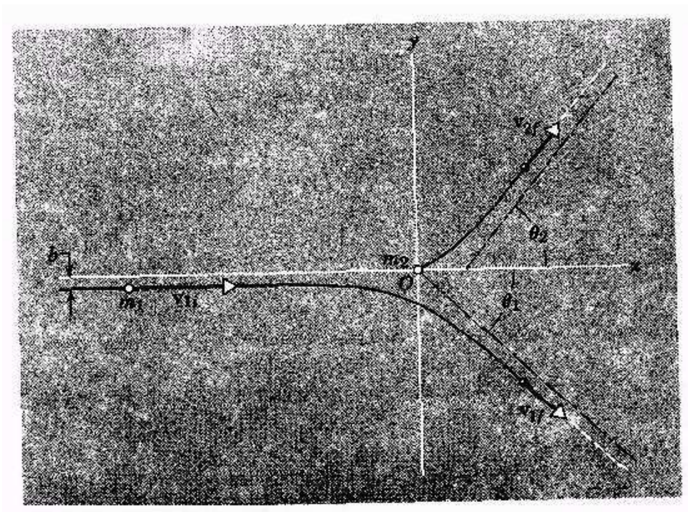
και για την y συνιστώσα

$$0 = m_2 v_{2f} \sin\theta_2 - m_1 v_{1f} \sin\theta_1$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ή κρούση είναι ε λ α σ τ ι κ ή . Τότε ισχύει η διατήρηση της κινητικής ενέργειας και έτσι μπορούμε να πάρουμε μια τρίτη εξίσωση,

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Αν ξέρουμε τις αρχικές συνθήκες (m_1 , m_2 και v_{1i}), μας απομένουν τέσσερις



Σχ. 5 Δύο σωμάτια, m_1 και m_2, σε μια κρούση. Οι άσπροι κύκλοι δείχνουν τις θέσεις τους πριν από την κρούση, οι μαύροι μετά την κρούση. Αρχικά το m_2 ηρεμεί. Η παράμετρος κρούσης b είναι η απόσταση κατά την οποία η κρούση απέχει από το να είναι μετωπική.

άγνωστοι (v_{1f}, v_{2f} , θ_1 και θ_2) αλλά με τρεις μόνο εξισώσεις που τους συνδέουν.

Μπορούμε να ξέρουμε την κίνηση μετά την κρούση μόνο αν προσδιορίσουμε την τιμή μιας απ' αυτές τις άγνωστες ποσότητες, όπως π.χ. της θ_1.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2ο

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

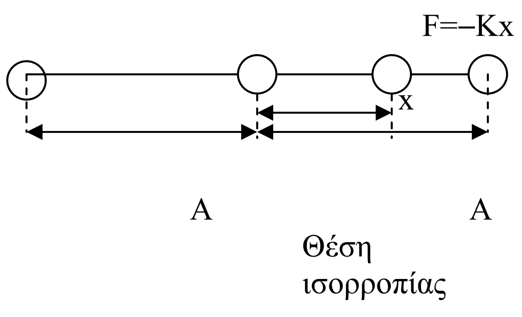
1. Αρμονική κίνηση

Η παρατήρηση της φύσης μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι πολλές φυσικές διαδικασίες είναι επαναλαμβανόμενες. Χαρακτηριστικά παραδείγματα, η περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονα της κάθε 24 ώρες , οι ταλαντώσεις των χορδών των μουσικών οργάνων , ή κίνηση των δεικτών ενός ρολογιού , η κίνηση μιας μάζας που κρέμεται από ένα ελατήριο όταν την απομακρύνουμε από τη θέση ισορροπίας και την αφήσουμε ελεύθερη. Οποιαδήποτε κίνηση επαναλαμβάνεται σε ίσα χρονικά διαστήματα λέγεται περιοδική κίνηση.

Η περιοδική κίνηση χαρακτηρίζεται από το χρόνο που απαιτείται για την επανάληψη της και που ονομάζεται περίοδος Τ. Πιο συχνά , χρησιμοποιείται η συχνότητα f , που είναι ο αριθμός των επαναλήψεων της περιοδικής κίνησης στη μονάδα του χρόνου. Προφανώς ισχύει $f=\frac{1}{T}$ (1.1).

Η μετατόπιση (γραμμική χ ή γωνιακή φ) είναι η απόσταση (γραμμική ή γωνιακή) του σώματος που κάνει ταλάντωση από τη θέση ισορροπίας του σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Το πλάτος Α , είναι η μέγιστη μετατόπιση (δηλαδή η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η μεταβλητή χ ή φ) (βλέπε σχήμα 1.1)



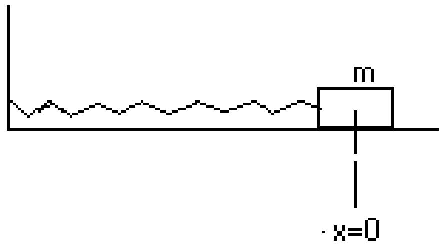
Σχήμα 1.1

Όταν η μετατόπιση χ ή φ εκφράζεται σε συνάρτηση ημιτόνου ή συνημιτόνου, τότε η περιοδική κίνηση λέγεται αρμονική κίνηση.

Κάθε περιοδική κίνηση στην οποία το κινητό πάει κι έρχεται ακολουθώντας την ίδια τροχιά λέγεται ταλάντωση. Αν η τροχιά είναι ευθεία η ταλάντωση λέγεται γραμμική και είναι αυτή με την οποία θα ασχοληθούμε κατά κύριο λόγο. Αν δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας λόγω τριβής , η περιοδική κίνηση θα συνεχίζεται , όπως ακριβώς ξεκίνησε και θα λέγεται αμείωτη.

2. Ο αρμονικός ταλαντωτής

Ας θεωρήσουμε ένα απλό μηχανικό σύστημα , όπως μια μάζα m που είναι συνδεδεμένη σ΄ ένα ελατήριο όπως στο σχήμα (2.1)

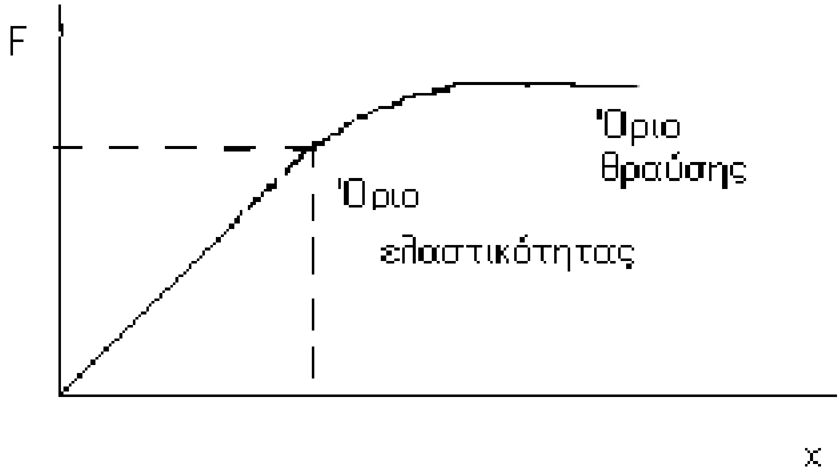


Σχήμα 2.1

Αν συμπιέσουμε ένα ελατήριο , μια δύναμη θα τείνει να επαναφέρει το ελατήριο στην αρχική του θέση και το ίδιο θα συμβεί αν τεντώσουμε το ελατήριο. Είναι αξιοσημείωτο ότι η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο είναι ανάλογη με την μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας. Δηλαδή , αν η θέση ισορροπίας είναι αυτή για την οποία $\chi=0$, τότε η δύναμη F θα δίνεται από τη σχέση : $F=-K\cdot\chi$ (εξ. 2.1). Το αρνητικό σημείο δείχνει ότι η δύναμη είναι πάντα αντίθετη της μετατόπισης , δηλαδή η δύναμη τείνει να επαναφέρει το σύστημα στην ισορροπία.

– Σημείωση 1 : Η γραμμική σχέση (2.1) εφαρμόζεται όχι μόνο στα ελατήρια

αλλά και κατά την παραμόρφωση των περισσοτέρων στερεών σωμάτων. Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως νόμος του Hooke (1660). Ο νόμος του Hooke ισχύει όσο η δύναμη δεν περνάει ένα ορισμένο όριο , που ονομάζεται όριο ελαστικότητας. Αν η δύναμη πάρει τιμές μεγαλύτερες του ορίου ελαστικότητας , το σώμα θα υποστεί μόνιμη παραμόρφωση και αν η δύναμη εξακολουθεί να μεγαλώνει το σώμα θα σπάσει (βλέπε σχήμα 2.2)



Σχήμα 2.2

2.1 Εξισώσεις της απλής αρμονικής κίνησης

Με χρήση του νόμου του Νεύτωνα , έχουμε : $F=-K\cdot x=m\cdot a=m\cdot \frac{d^2x}{dt^2}$

Δηλαδή έχουμε $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}\cdot x = 0$ **(2.1.1) , δηλαδή μια διαφορική εξίσωση.**

Η γενική λύση της (2.1.1) έχει την μορφή $x = C\cdot συνωt + D\cdot ημωt$ **(2.1.2) ή την ισοδύναμη μορφή** $x = A\cdot ημ(ωt+δ)$ **(2.1.3) , όπου** $ω=\sqrt{K/m}$ **και A, δ σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες κάθε προβλήματος (π.χ. οι τιμές μετατόπισης και ταχύτητας για t=0).**

A : η μέγιστη μετατόπιση και καλείται πλάτος της ταλάντωσης,

$φ$ =ωt+δ : γωνία φάσης,

δ: αρχική φάση , δηλαδή η φάση για t=0.

Σημείωση 2 : Η ισοδυναμία των λύσεων (2.1.2) και (2.1.3) γίνεται εύκολα ως εξής : $x=Aημ(ωt+δ)=Aημωt\cdot συνδ + Aσυνωt\cdot ημδ = C\cdot συνωt + D\cdot ημωt$ **με** $C=Aημδ$ **και** $D=Aσυνδ$ **ή** $A=\sqrt{C^2+D^2}$ **και** $εφδ=C/D$ **που είναι πάντα δυνατά.**

<u>Εφαρμογή 1:</u> Δείξτε ότι χ(t+T) = χ(t) όπου $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{m/K}$ **(2.1.4) η περίοδος της ταλάντωσης.**

Η λύση στην οποία καταλήξαμε είναι εφαρμόσιμη σε όλα τα συστήματα στα οποία ασκείται μια μοναδική δύναμη που είναι ανάλογη με την μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας. Η ταλάντωση που κάνουν αυτά τα

συστήματα λέγεται απλή αρμονική ταλάντωση . Η ταχύτητα και η επιτάχυνση σε μια τέτοια ταλάντωση δίνονται από τις σχέσεις :

v = $\frac{d\chi}{dt}$ **= ωΑημ(ωt+δ) (2.1.5) και α =** $\frac{d^2\chi}{dt^2}$ **= –ω** ^{2} **Αημ(ωt+δ) (2.1.6)**

2.2 Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με τριβή

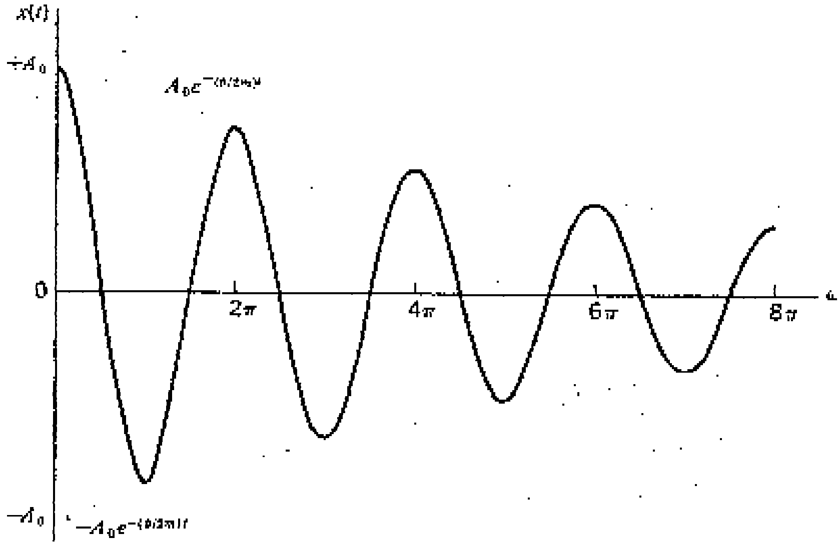
Οι ταλαντώσεις που έχουμε θεωρήσει μέχρι τώρα αναφέρονται σε συστήματα που ταλαντώνονται χωρίς να έχουν απώλεια ενέργειας λόγω τριβών. Η πραγματικότητα ,όμως , είναι πολύ διαφορετική . Οι τριβές υπάρχουν και η μηχανική ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου . Οι δυνάμεις που προκαλούν τις απώλειες έχουν κατεύθυνση αντίθετη της κίνησης και το μέτρο τους είναι συνήθως ανάλογο του μέτρου της ταχύτητας του σώματος (π.χ. η κίνηση ενός αντικειμένου μέσα σε υγρό). Αν θεωρήσουμε τη δύναμη αυτή ανάλογη της ταχύτητας τότε μπορούμε να γράψουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ως εξής: ΣF=mα ή ΣF=–Κχ–bv=mα , όπου b η σταθερά απόσβεσης λόγω της κίνησης στο υγρό.

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται $\frac{d^2\chi}{dt^2} + \frac{b}{m}\cdot\frac{d\chi}{dt} + \frac{\mathrm{K}}{m}\cdot x = 0$ (2.2.1)

Η μορφή της λύσης της διαφορικής εξίσωσης (2.2.1) (προσπαθήστε να την επιλύσετε) , εξαρτάται από τις τιμές του συντελεστή απόσβεσης b.

Α) Αν ο b είναι μικρός, ($b<2m\omega_0$) τότε : $x(t)= A\exp(-\frac{b}{2m}t)\cdot$συν(ωt+δ) (2.2.2) με την κυκλική συχνότητα της κίνησης να είναι ω= $\left(\frac{\mathrm{K}}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (2.2.3) ενώ

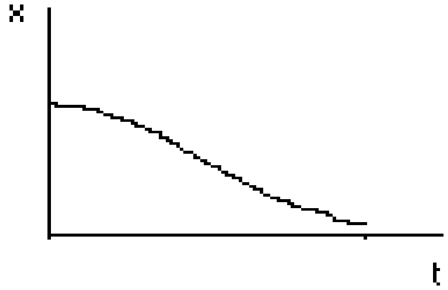
$\omega_0=\left(\frac{\mathrm{K}}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ (2.2.4) και την μεταβολή του x(t) , όπως στο σχήμα:



Σχήμα 2.2.1

Δηλαδή , η τριβή προκαλεί εκθετική εξασθένιση του πλάτους της ταλάντωσης και ταυτόχρονα μειώνει τη συχνότητα της

Β) Αν έχουμε μεγάλο b, ($b>2m\omega_0$) τότε το σώμα δεν κάνει ούτε μια ταλάντωση και φτάνει στη θέση ισορροπίας ύστερα από άπειρο χρόνο.



Σχήμα 2.2.2

2.3 Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση χωρίς τριβές

Σ΄ αυτή την περίπτωση , εκτός της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα που ταλαντώνεται από το ελατήριο , ασκείται και μια εξωτερική δύναμη που μεταβάλλεται με το χρόνο. Μια συνήθης μορφή τέτοιας δύναμης είναι η ημιτονοειδής , δηλαδή $F(t)=F_0$ημωt με ω γενικά διαφορετικό της ω_0 των ελευθέρων ταλαντώσεων του συστήματος. Τότε θα έχουμε :

$$-K\cdot x + F_0 ημωt = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad ή \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{K}{m}x=\frac{F_0}{m}ημωt \quad (2.3.1)$$

Η γενική λύση της (2.3.1) είναι : $x(t) = A_1 \eta\mu\omega_O t + A_2 \sigma\upsilon\nu\omega_O t + \dfrac{F_O}{m(\omega_O^2 - \omega^2)}\eta\mu\omega t$

(2.3.2)

Αν η ω τείνει να γίνει ίση με την ω$_O$, το πλάτος της ταλάντωσης τείνει να αυξηθεί απεριόριστα.

2.4 Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με τριβή

Το πρόβλημα γίνεται αρκετά πιο δύσκολο αν η εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση γίνεται με τριβή. Τότε αν θεωρήσουμε ότι η δύναμη τριβής είναι ανάλογη της ταχύτητας , μπορούμε να γράψουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ως εξής:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - \lambda\frac{dx}{dt} + F_O\,\eta\mu\omega t \quad \text{ή} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}x = \frac{F_O}{m}\eta\mu\omega t \quad \textbf{(2.4.1)}$$

Μια μερική λύση της (2.4.1) θα έχει τη μορφή x(t)=A$_1 \eta\mu\omega t +$ A$_2$ συνωt (2.4.2) και μετά τον προσδιορισμό των A$_1$, A$_2$ (προσπαθήστε να κάνετε τον προσδιορισμό τους) , η μερική λύση θα έχει την μορφή:

$$x(t) = \frac{F_O}{m\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\dfrac{\lambda^2}{4m}}}\eta\mu(\omega t + \phi) \quad \textbf{(2.4.3)} \quad \text{με} \quad \varepsilon\phi\phi = -\frac{\omega\lambda}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} \quad \textbf{(2.4.4)}$$

Στην μερική λύση (2.4.3) , πρέπει να προστεθεί η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης της (2.4.1) , που εξαρτάται η μορφή της από το μέγεθος της απόσβεσης. Στην περίπτωση που η απόσβεση είναι ασθενής η γενική λύση της ομογενούς έχει την μορφή

$$x_1(t) = e^{-\frac{\lambda}{2m}t}(B_1\eta\mu\omega_1 t + B_2\sigma\upsilon\nu\omega_1 t) \quad \textbf{(2.4.5)}$$

με $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \dfrac{\lambda^2}{4m^2}}$ **(2.4.6).**

Η (2.4.5) μετά από ορισμένο χρονικό διάστημα μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα και απομένει μόνο η (2.4.3). Φυσικά η μορφή της λύσης θα εξαρτάται κάθε φορά από τα ειδικά χαρακτηριστικά του προβλήματος που θέλουμε να επιλύσουμε.

Μια καλή παρατήρηση είναι ότι περίπτωση αυτή η ταλάντωση γίνεται με την συχνότητα ω της εξωτερικής δύναμης και όχι με την ιδιοσυχνότητα του ελατηρίου.

2.5 Μη αρμονικοί ταλαντωτές

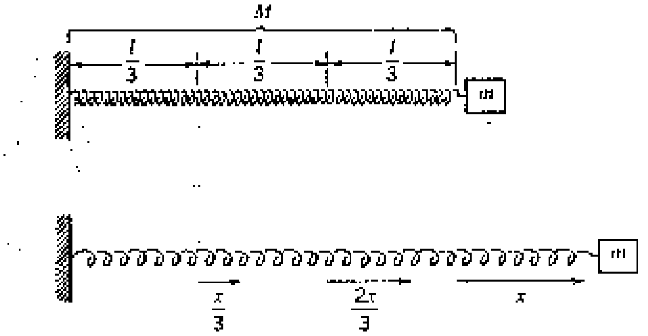
Θεωρήσαμε μέχρι τώρα ταλαντώσεις που γίνονται με την επίδραση δύναμης επαναφοράς ανάλογης με την μετατόπιση και δύναμης τριβής ανάλογης με την ταχύτητα. Η προσέγγιση αυτή μας διευκολύνει αλλά δεν ανταποκρίνεται απόλυτα στην πραγματικότητα που είναι σαφώς διαφορετική. Αν θεωρήσουμε π.χ. ότι ένα ελατήριο υπακούει στο νόμο του Hooke , ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για ελεύθερη ταλάντωση χωρίς τριβές μιας μάζας m που είναι προσδεδεμένη στο ελατήριο , θα είναι η εξής $F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$ (2.5.1). Δεν υπάρχει όμως πραγματικό ελατήριο που να έχει τέτοια συμπεριφορά. Η πιο απλή μορφή ασυμμετρίας είναι αυτή στην οποία η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη του x^2. Η εξίσωση της κίνησης σε μια τέτοια περίπτωση θα είναι : $m\frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{K}x + ax^2 = 0$ (2.5.2). Η μορφή της (2.5.2) είναι εύκολο να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι η $x = \mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\omega_o t$ δεν αποτελεί λύση της (2.5.2) , δηλαδή η κίνηση δεν περιγράφεται όπως η αρμονική με συγκεκριμένη συχνότητα ω_o. Η κίνηση βέβαια είναι περιοδική αλλά αντί της $x = \mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\omega_o t$, βρίσκουμε ότι μια άπειρη ομάδα αρμονικών της ω_o απαιτούνται για να περιγράψουμε την κίνηση , δηλαδή

x = $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n \sigma\upsilon\nu(n\omega_o t - \delta_n)$ (2.5.3).

Μια αντίστοιχη κατάσταση θα έχουμε αν η F είναι ανάλογη του x^3 ή αν η δύναμη τριβής είναι ανάλογη του u^2 ή του u^3. Πιο σύνθετη είναι η μελέτη ταλάντωσης , όπως οι προηγούμενες στις οποίες όμως έχουμε επίδραση εξωτερικής μεταβαλλόμενης με το χρόνο δύναμης (π.χ. ημιτονοειδούς). Μια τέτοια κίνηση θα περιγράφεται π.χ. από την εξίσωση κίνησης: $m\frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{K}x + ax^2 = F_O \eta\mu\omega t$ (2.5.4).

2.6 Ταλαντώσεις που περιλαμβάνουν ελατήρια με μάζα.

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ότι τα ελατήρια δεν είχαν μάζα και συμπεριφέρονταν σαν μια αποθήκη δυναμικής ενέργειας. Φυσικά , αυτό ήταν μια προσέγγιση και σε πολλές περιπτώσεις η μάζα του ελατηρίου παίζει τον κύριο ρόλο. Ας εξετάσουμε λοιπόν το πρόβλημα που αφορά σύστημα που αποτελείται από μάζα m που είναι προσδεμένη σε ελατήριο σταθεράς K και μάζας M ομοιόμορφα κατανεμημένης. Θα εξεταστεί η διαφορά της περιόδου ταλάντωσης αυτού του συστήματος από σύστημα που περιλαμβάνει ελατήριο μηδενικής μάζας. Μια πρώτη εκτίμηση είναι ότι η περίοδος θα μεγαλώσει. Πόσο όμως; Μια απλή προσέγγιση είναι να υποθέσουμε ότι τα διάφορα μέρη του ελατηρίου υφίστανται μετατοπίσεις ανάλογες με τις αποστάσεις τους από το ακίνητο άκρο , όπως δείχνεται στο σχήμα 2.6.1.



Σχήμα 2.6.1 Ομοιόμορφη έκταση ελατηρίου με μάζα.

Θεωρούμε ότι το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι l και συμβολίζουμε την απόσταση ενός μικρού τμήματος του ελατηρίου από το ακίνητο άκρο με s όπου $0 \le s \le l$. Η μάζα του μικρού τμήματος του ελατηρίου που βρίσκεται μεταξύ του s και του $s + ds$, δίνεται από τη σχέση $dM = \frac{M}{l}ds$ (2.6.1) και η μετατόπιση του είναι $\frac{s}{l}x$ (2.6.2) . Έτσι η κινητική του ενέργεια δίνεται από την

$$dK = \frac{1}{2}(\frac{M}{l}ds)(\frac{s}{l}\frac{dx}{dt})^2 = \frac{M}{2l^3}(\frac{dx}{dt})^2 s^2 ds. \quad \textbf{(2.6.3)}$$

Η ολική κινητική ενέργεια του ελατηρίου βρίσκεται με ολοκλήρωση της παραπάνω έκφρασης , με θεώρηση του $\frac{dx}{dt}$ ως σταθερού συντελεστή.

Έτσι έχουμε $\mathrm{K}_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\eta\rho\acute{\iota}o\upsilon} = \frac{\mathrm{M}}{2l^3}(\frac{dx}{dt})^2\int_0^l s^2 ds = \frac{1}{6}\mathrm{M}(\frac{dx}{dt})^2$ (2.6.4). Η διατήρηση της ενέργειας για το σύστημα γίνεται :

$$\frac{1}{2}m\cdot(\frac{dx}{dt})^2+\frac{1}{6}\mathrm{M}(\frac{dx}{dt})^2+\frac{1}{2}\mathrm{K}x^2=\mathrm{E} \quad \textbf{(2.6.5)}$$

και μας δίνει $\omega^2=\dfrac{\mathrm{K}}{m+\dfrac{\mathrm{M}}{3}}$ (2.6.6) δηλαδή αποτέλεσμα αντίστοιχο με αυτό που θα είχαμε αν σε ελατήριο χωρίς μάζα προσθέταμε στην προσδεμένη στο ελατήριο μάζα m μια ακόμη μάζα ίση με $\dfrac{\mathrm{M}}{3}$. Είναι όμως αυτό αληθές ; Ας θεωρήσουμε την ακραία περίπτωση που απομακρύνουμε την μάζα m και αφήνουμε το σύστημα μόνο με το ελατήριο το οποίο έχει όλη την κινητική αλλά και δυναμική ενέργεια. Θα είναι η συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης $\omega=\sqrt{\dfrac{3\mathrm{K}}{\mathrm{M}}}$; Η απάντηση είναι όχι. Διότι ο παραπάνω υπολογισμός θεωρεί ότι η έκταση των τμημάτων του ελατηρίου είναι ανάλογη με την απόσταση από το σταθερό άκρο . Αυτό όμως ισχύει μόνο αν η δύναμη που ασκείται είναι ίδια σε όλα τα σημεία κατά μήκος του ελατηρίου. Η συνθήκη όμως αυτή δεν ισχύει και έχουμε μεταβολή της δύναμης με την απόσταση κατά μήκος του ελατηρίου. Η εξίσωση λοιπόν $\omega^2=\dfrac{\mathrm{K}}{m+\dfrac{\mathrm{M}}{3}}$ είναι μόνο μια προσέγγιση. Αν πάντως δικαιολογείται ότι M<<m, τότε η δύναμη κατά μήκος του ελατηρίου μπορεί να θεωρηθεί σταθερή (ενώ για m=0 , η δύναμη θα γίνει μηδέν στο ελεύθερο άκρο , στο οποίο θα υπάρχει επιτάχυνση αλλά όχι προσδεμένη μάζα).

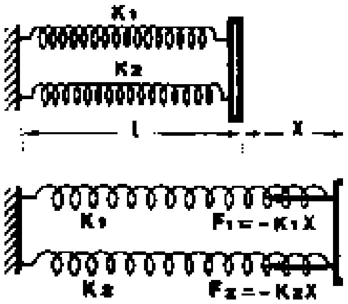
Ένα συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε είναι ότι η συχνότητα f(=ω/2π) της ελεύθερης ταλάντωσης ενός ομοιόμορφου ελατηρίου μάζας Μ και σταθεράς ελατηρίου Κ θα δίνεται από μια σχέση της μορφής f=σταθ.$\sqrt{\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}}}$ (όπου η σταθερά είναι ένας καθαρός αριθμητικός συντελεστής) επειδή αυτός είναι ο μοναδικός συνδυασμός των Κ και Μ που έχει διαστάσεις συχνότητας. Μπορούμε να πάμε ένα βήμα παρακάτω , ανάλογα με την εφαρμογή. Υποθέτουμε για παράδειγμα ότι έχουμε στερεά ράβδο , μήκους l , διατομής Α , πυκνότητας ρ και μέτρου του Young Y. Τότε θα έχουμε Μ=Α·l και $f=\dfrac{\sigma\tau\alpha\theta.}{l}\sqrt{\dfrac{\mathrm{Y}}{l}}$, όπου όμως η σταθερά δεν έχει προσδιοριστεί.

2.7 Σύνδεση ελατηρίων

Για ιδανικά ελατήρια που συνδέονται "παράλληλα" θα έχουμε :

$F_1 = K_1 x$ **,** $F_2 = K_2 x$ **και** $F = F_1 + F_2 = (K_1 + K_2)x$**. Τότε** $K_{\iota\sigma o\delta} = \dfrac{F}{x} = K_1 + K_2$ **(2.7.1)**

και γενικά $K_{\iota\sigma o\delta} = \sum_{i=1}^{n} K_\iota$ **(2.7.2) .**

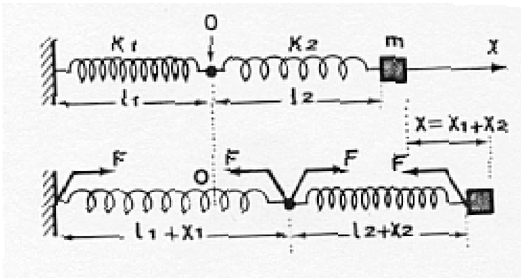


Σχήμα 2.7.1

Για ελατήρια "σε σειρά" , η δύναμη είναι ίδια σε κάθε ελατήριο , αλλά η συνολική παραμόρφωση είναι το άθροισμα των επιμέρους παραμορφώσεων. Έτσι θα

έχουμε : $F = K_1 x_1 = K_2 x_2$ **και** $x = x_1 + x_2 = \dfrac{F}{K_1} + \dfrac{F}{K_2}$ **.**

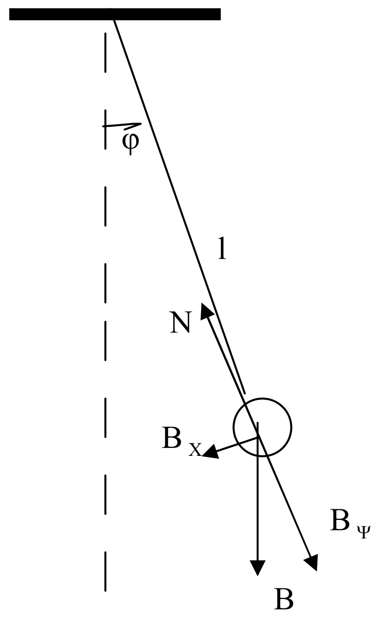
Τότε : $K_{\iota\sigma o\delta} = \dfrac{F}{x} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{K_1} + \dfrac{1}{K_2}}$ **(2.7.3) και γενικά** $K_{\iota\sigma o\delta} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{K_\iota}}$ **(2.7.4) .**



Σχήμα 2.7.2

3. Απλό ή μαθηματικό εκκρεμές

Ένα φυσικό σύστημα που προσεγγίζει πολύ την απλή αρμονική κίνηση είναι το απλό εκκρεμές. Το εκκρεμές αυτό αποτελείται από σώμα «σημειακής» μάζας m , που αναρτάται στο ένα άκρο νήματος αμελητέας μάζας και χωρίς ελαστικότητα , το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο. Στο σώμα ασκείται το βάρος Β και η δύναμη του νήματος (Τάση) Ν



Σχήμα 3.1

Αναλύουμε τη δύναμη Β σε δύο συνιστώσες , μια κατά μήκος του νήματος $B_\Psi = mg$ **συνφ και μια κάθετη στο νήμα** $B_X = mg\eta\mu\phi$**.Η** B_Ψ **είναι αντίθετη της Ν. Η** B_X **επιταχύνει τη μάζα m κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου ακτίνας l και κέντρου Ο. Αν η μετατόπιση από το σημείο Α είναι s , τότε έχουμε :** $F = -mg\eta\mu\phi = ma = m\dfrac{d^2s}{dt^2}$ **(3.1).**

Η μετατόπιση s δίνεται από τη σχέση s=l·φ οπότε $\dfrac{d^2s}{dt^2} = l\dfrac{d^2\phi}{dt^2}$ **(3.2).**

Από τις (3.1) και (3.2) έχουμε : $-g\eta\mu\phi = l\,\dfrac{d^2\phi}{dt^2}$ **(3.3).**

Για μικρές γωνίες ισχύει $\eta\mu\phi \cong \phi$ **και η (3.3) γίνεται** $\dfrac{d^2\phi}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\phi = 0$ **(3.4) , της οποίας η λύση είναι** $\phi = \phi_O \eta\mu(\omega t + \delta)$ **(3.5) όπου** $\phi_O = \delta$ **σταθερές και** $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ **. Η περίοδος της κίνησης είναι** $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ **(3.6).**

Σημείωση 3.1

Η μετατόπιση είναι $s = s_O \eta\mu(\omega t + \delta)$ **με** $s_{O,} \delta$ **σταθερές , αφού ισχύει** $s = l\phi$ **, και**

$$u = \frac{ds}{dt} = \omega s_O \sigma\upsilon\nu(\omega t + \delta).$$

Σημείωση 3.2

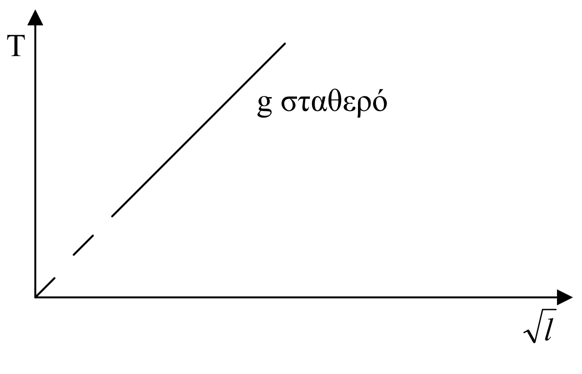
Η δύναμη "επαναφοράς" $F = \mathrm{B_X} = -mg\eta\mu\phi$ **είναι ανάλογη όχι της φ αλλά του ημφ , έτσι η κίνηση δεν απλή αρμονική. Αν όμως η φ είναι μικρή , το** $\eta\mu\phi \cong \phi(rad)$ **. Για παράδειγμα όταν** $\phi = 0{,}1 rad (\leq 6^O)$ **, τότε** $\eta\mu\phi = 0{,}0998$ **, δηλαδή διαφορά μόλις 0,2%.**

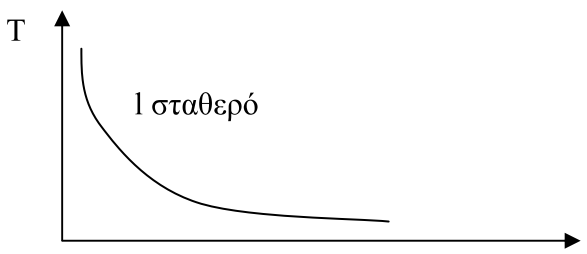
3.1 Διερεύνηση της εξίσωσης που δίνει την περίοδο T

Είδαμε ότι για μικρές αιωρήσεις ισχύει $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ **(3.1.1) . Για πιο μεγάλα πλάτη η περίοδος βρίσκεται με τη χρήση ελλειπτικών ολοκληρωμάτων. Μια πρώτη προσέγγιση για την περίοδο δίνεται από τον τύπο:** $\mathrm{T} = (1 + \frac{\phi_O^2}{16}) 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

(3.1.2)

Από τη σχέση (3.1.1) προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της περιόδου του μαθηματικού εκκρεμούς σε συνάρτηση με την τετραγωνική ρίζα του μήκους l είναι ευθεία . Από την ίδια σχέση προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της περιόδου T σε συνάρτηση με την $\sqrt{g}$ **είναι υπερβολή.**

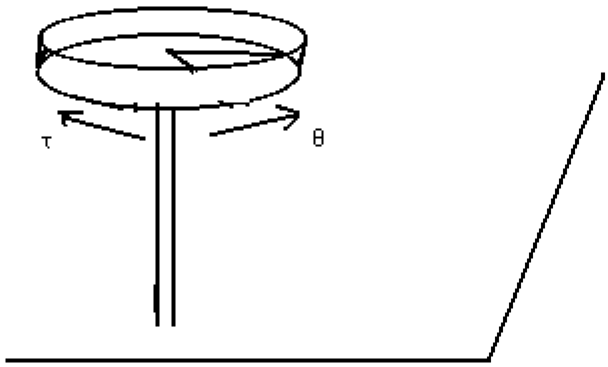




Σχήμα 3.1.1 $\sqrt{g}$

4. Στροφική ταλάντωση

Έστω Ι η ροπή αδράνειας του δίσκου , γύρω από τον άξονα περιστροφής του. Αν η γωνιακή μετατόπιση είναι θ , η ροπή επαναφοράς είναι M=–K·θ , όπου K η σταθερά στρέψης. Με χρήση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για ένα στερεό σώμα : $\Sigma \mathrm{M} = \mathrm{I}\alpha = \mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2}$ **η εξίσωση της κίνησης γράφεται: -Kθ=Iα ή** $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{I}}\theta$ **(4.1) . Η εξίσωση αυτή μας δίνει** $\omega = \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{I}}}$ **(4.2) και** $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}}$ **(4.3) και η κίνηση περιγράφεται από τη συνάρτηση :** $\theta = \theta_{\mathrm{O}}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi)$ **(4.4) , όπου** θ_{O} **το πλάτος της ταλάντωσης.**



Σχήμα 4.1

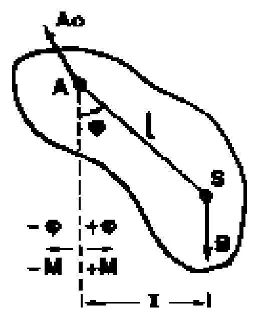
5. Το φυσικό εκκρεμές

Οποιοδήποτε στερεό σώμα ελεύθερο να κάνει ταλαντώσεις γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα κάτω από την επίδραση της βαρύτητας καλείται φυσικό εκκρεμές.

Στο σχήμα 5.1 φαίνεται η εγκάρσια τομή ενός εκκρεμούς κάθετου στον άξονα στήριξης μέσω του κέντρου μάζας του εκκρεμούς. Έστω Β το βάρος του εκκρεμούς , α η απόσταση AS από το κέντρο μάζας ως τον άξονα αιώρησης και I η ροπή αδράνειας του εκκρεμούς ως προς τον άξονα αιώρησης. Προσδιορίζουμε τη θέση του εκκρεμούς με την βοήθεια της γωνίας φ την οποία σχηματίζει η AS σε σχέση με την κατακόρυφο. Η

διαφορική εξίσωση της περιστροφικής κίνησης είναι: M=I$\frac{d^2\phi}{dt^2}$ **(5.1). Στην περίπτωση μας** $\mathrm{M} = -\mathrm{B}\alpha\sigma\upsilon\nu\phi$ **(Το – δηλώνει ότι η "κατεύθυνση" της ροπής είναι αντίθετη της θετικής κατεύθυνσης της γωνίας φ). Οπότε** $\mathrm{I}\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\mathrm{B}\alpha\sigma\upsilon\nu\phi \rightarrow \frac{d^2\phi}{dt^2} + \mathrm{K}^2\eta\mu\phi = 0$ **(5.2) , όπου** $\mathrm{K}^2 = \frac{\mathrm{B}\alpha}{\mathrm{I}}$ **(5.3).**

Αυτή η διαφορική εξίσωση δεν μπορεί να ολοκληρωθεί όπως οι συνηθισμένες εξισώσεις. Θεωρώντας μόνο μικρές ταλαντώσεις οπότε προσεγγιστικά ημφ≅φ (που συμβαίνει όταν φ<1rad) έχουμε$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \mathrm{K}^2\phi = 0$**. Η εξίσωση αυτή έχει την ίδια μορφή με αυτή των γραμμικών ταλαντώσεων ενός σωματίου και ανάλογα η γενική της λύση έχει την μορφή**$\phi = C_1\eta\mu\mathrm{K}t + C_2\sigma\upsilon\nu\mathrm{K}t$ **(5.5).**



Σχήμα 5.1

Θεωρώντας ότι την χρονική στιγμή t=0 , το εκκρεμές αποκλίνει κατά μια μικρή γωνία $\phi = \phi_{\mathrm{O}}$ **και αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα (**$\omega_{\mathrm{O}} = 0$**) έχουμε :**

$\phi_{\mathrm{O}} = C_1\eta\mu 0 + C_2\sigma\upsilon\nu 0 \;\rightarrow\; C_2 = \phi_{\mathrm{O}}$ **και επειδή** $\omega = \frac{d\phi}{dt} = C_1 K\sigma\upsilon\nu\mathrm{K}t - C_2\mathrm{K}\eta\mu\mathrm{K}t$

$\rightarrow \omega_{\mathrm{O}} = 0 = C_1\mathrm{K}\sigma\upsilon\nu 0 - C_2\mathrm{K}\eta\mu 0 \rightarrow 0 = C_1\mathrm{K} \rightarrow C_1 = 0$**. Οπότε θα έχουμε** $\phi = \phi_{\mathrm{O}}\sigma\upsilon\nu\mathrm{K}t$ **(5.6).**

Συνεπώς , μικρές ταλαντώσεις του φυσικού εκκρεμούς είναι αρμονική κίνηση. Η περίοδος της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση :$\mathrm{T}_{\Phi\Upsilon\Sigma} \cong \frac{2\pi}{\mathrm{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{B}\alpha}}$ **(5.7).**

Έτσι για μικρές ταλαντώσεις , η περίοδος δεν εξαρτάται από την αρχική γωνία απόκλισης ϕ_{O}**. Αν δεν θεωρήσουμε ότι η γωνία** ϕ_{O} **είναι μικρή (οπότε**

δεν ισχύει ότι ημφ≅φ) τότε η $T_{ΦΥΣ}$ **εξαρτάται από τη** ϕ_O**. Κατά προσέγγιση η εξάρτηση δίνεται από τον τύπο:** $T_{ΦΥΣ} \cong 2\pi\sqrt{\frac{I}{B\alpha}}(1+\frac{\phi_O^2}{16})$ **(5.8) . Αν π.χ. έχουμε** $\phi_O = 0{,}4rad(\cong 23^O)$ **η σχέση** $T_{ΦΥΣ} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{B\alpha}}$ **(5.9) , δίνει την περίοδο της ταλάντωσης με ακρίβεια 1%. Τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν και στην περίπτωση του απλού εκκρεμούς , στο οποίο ένα βάρος μικρού μεγέθους κρέμεται από ένα μη εκτατό νήμα μήκους l και αμελητέας μάζας σε σχέση με τη μάζα του εκκρεμούς . Έχουμε , τότε , ότι** $I = ml^2 = \frac{B}{g}l^2$ **, α=AS=l . Με αντικατάσταση αυτών των τιμών στην εξίσωση της περιόδου έχουμε** $T_{ΑΠΛΟΥΕΚΚΡ} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ **(5.10). Με σύγκριση των δύο εξισώσεων παρατηρούμε ότι για μήκος** $l_1 = \frac{Ig}{Ba} = \frac{I}{M\alpha}$ **(5.11) η περίοδος ταλάντωσης του απλού εκκρεμούς είναι ίση με αυτήν ενός ισοδύναμου φυσικού εκκρεμούς. Το μήκος** l_1 **ενός τέτοιου απλού εκκρεμούς του οποίου η περίοδος ταλάντωσης είναι ίση με αυτήν ενός δοσμένου φυσικού εκκρεμούς καλείται ισοδύναμο μήκος του φυσικού εκκρεμούς. Το σημείο Κ το οποίο βρίσκεται σε απόσταση ΑΚ=**l_1 **από τον άξονα στήριξης καλείται κέντρο της ταλάντωσης του φυσικού εκκρεμούς.**

6.Παράδειγμα υπολογισμού σφάλματος

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση g της βαρύτητας , με την βοήθεια ενός απλού εκκρεμούς. Η περίοδος ενός απλού εκκρεμούς δίνεται από τη σχέση: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \to g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ **(6.1)**

και $\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{T^2}$ **(6.2) ,** $\frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{8\pi^2 l}{T^3}$ **(6.3)**

Έχουμε όμως $(\delta g)^2 = \left[(\frac{\partial g}{\partial l})\delta l\right]^2 + \left[(\frac{\partial g}{\partial T})\delta T\right]^2 \to \delta g = 4\pi^2\sqrt{(\frac{\delta l}{T^2})^2 + (\frac{2l\cdot\delta T}{T^3})^2}$

6.1 Υπολογισμός σφάλματος

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα Α=φ(χ,ψ,…) και τα μεγέθη χ,ψ,… έχουν σφάλματα δχ,δψ,… τότε σύμφωνα με την μαθηματική θεωρία των σφαλμάτων έχουμε για το σφάλμα της Α :

$$\delta A = \sqrt{\left[(\frac{\partial A}{\partial \chi})\delta\chi\right]^2 + \left[(\frac{\partial A}{\partial \psi})\delta\psi\right]^2 + \ldots}$$

6.2 <u>Πρόβλημα</u>

Να δείξετε ότι αν η ποσότητα Α είναι μόνο γινόμενο και πηλίκο των μεγεθών χ,ψ,..., τότε ισχύει : $(\frac{\delta A}{A})^2 = (\frac{\delta\chi}{\chi})^2 + (\frac{\delta\psi}{\psi})^2 + \ldots$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3^{ο}

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΙΑ ΤΟΝ 2^{ο} ΝΟΜΟ ΤΟΥ NEWTON

Ο 2^{ος} Νόμος του Newton. Κάθε θεμελιώδης νόμος ‘κίνησης’ λέει στην ουσία το εξής: Δώσε μου την παρούσα κατάσταση, προσδιόρισέ μου τα αίτια που προκαλούν την αλλαγή της, και εγώ θα σου πω πώς να προβλέψεις το μέλλον και πώς να αποκαλύψεις το παρελθόν.

Στην περίπτωση της κίνησης ενός υλικού σημείου, η πρόβλεψη του μέλλοντος και η αποκάλυψη του παρελθόντος, ισοδυναμεί με τον πλήρη καθορισμό της τροχιάς, δηλαδή με τον προσδιορισμό της θέσης του υλικού σημείου για κάθε χρονική στιγμή, είτε μέλλουσα είτε παρελθούσα. Πράγματι, αν ξέρουμε τη θέση σαν συνάρτηση του χρόνου, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα, την επιτάχυνση και οποιαδήποτε άλλο μέγεθος μας ενδιαφέρει για κάθε χρονική στιγμή και επομένως να καθορίσουμε πλήρως την κινητική κατάσταση του υλικού σημείου

Το επόμενο βήμα είναι να δούμε τί ακριβώς σημαίνει ο όρος ‘παρούσα κατάσταση’ για ένα κινούμενο υλικό σημείο. Προφανώς απαραίτητο στοιχείο είναι η παρούσα θέση του υλικού σημείου. Είναι εύκολο όμως να βεβαιωθούμε, ότι μόνο η θέση σε μια ορισμένη χρονική στιγμή δεν φτάνει για να καθορίσει την κατάσταση.

Πράγματι από την ίδια θέση είναι δυνατόν να περάσουν άπειρες διαφορετικές τροχιές κάθε μία με διαφορετική ταχύτητα στην υπόψη θέση. Οδηγείται λοιπόν κανείς στο συμπέρασμα ότι για τον καθορισμό της κινητικής κατάστασης ενός υλικού σημείου σε μία ορισμένη χρονική στιγμή απαιτείται η γνώση της θέσης και της ταχύτητας κατά τη στιγμή αυτή. Φτάνουν όμως τα δύο αυτά μεγέθη ή μήπως απαιτείται και η γνώση π.χ. της επιτάχυνσης (την ίδια χρονική στιγμή); Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δεν είναι καθόλου προφανής, επειδή εξαρτάται από το ποιος είναι ο νόμος της κίνησης. Εάν ο νόμος κίνησης συνδέει την επιτάχυνση, την ταχύτητα και τη θέση -όπως κάνει ο νόμος του Newton ή ο γενικευμένος νόμος του Einstein – τότε η θέση και η ταχύτητα σε μία ορισμένη χρονική στιγμή καθορίζουν πλήρως την κινητική κατάσταση του υλικού σημείου τη στιγμή αυτή.

Η ισχύς του βασικού νόμου της κίνησης έχει τα όριά της δηλ. Δεν ισχύει για πολύ μεγάλες ταχύτητες συγκρίσιμες με την του φωτός (και πρέπει να αντικατασταθεί με τον γενικευμένο νόμο του Einstein) και δεν ισχύει όταν η έννοια της τροχιάς είναι ανεπαρκής.

Ο βασικός νόμος της κίνησης είναι η ληξιαρχική πράξη γέννησης της σύγχρονης επιστήμης και ένα μεγάλο ορόσημο στην μακραίωνα πορεία του ανθρώπινου μυαλού για την κατανόηση της φύσης.

Ιδού λοιπόν τι λέει ο νόμος αυτός:

Η συνολική δύναμη που ασκείται σε ένα υλικό σωμάτιο, είναι ίση με τη μάζα του επί την επιτάχυνσή του, ή ισοδύναμα με σύμβολα

$$\vec{F} = m\vec{\alpha}$$

Ο νόμος αυτός θα ήταν καλύτερα να γράφεται με τον ισοδύναμο τρόπο:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{F}}{m}$$

για να τονισθεί ότι ο στόχος του είναι να προσδιορίσει την επιτάχυνση α από την δύναμη F και τη μάζα m.

<u>Ο Νόμος της αδράνειας.</u> Αν δεν υπάρχει δύναμη (δηλ. Αν F=0), τότε έπεται από το βασικό νόμο ότι η επιτάχυνση θα είναι ίση με το μηδέν, πράγμα που σημαίνει ότι η ταχύτητα θα παραμείνει αμετάβλητη. Με άλλα λόγια , η έλλειψη δύναμης δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη ακινησία ή σταμάτημα της κίνησης, αλλά διατήρηση της κίνησης με αμετάβλητη ταχύτητα! Το συμπέρασμα αυτό –γνωστό σαν νόμος της αδράνειας-φαίνεται να είναι σε πλήρη αντίφαση με τις καθημερινές μας εμπειρίες, όπου η διατήρηση της κίνησης μοιάζει να απαιτεί τη διαρκεί δράση κάποιας εξωτερικής δύναμης.

<u>Τι είναι δύναμη.</u> Έχουμε όλοι μας τόσες άμεσες εμπειρίες δυνάμεων, ώστε από πρώτη άποψη το ερώτημα «τι είναι δύναμη» να φαίνεται περιττό. Μετά όμως από κάποια σκέψη και έχοντας κανείς υπόψη του το θεμελιώδη νόμο κίνησης της Κλασικής Μηχανικής, θα μπορούσε να πει ότι η δύναμη είναι το αίτιο που προκαλεί μεταβολή της ταχύτητας.

Ο ορισμός αυτός, αν και ουσιαστικά βάσιμος, δημιουργεί τον κίνδυνο να μετατραπεί ο βασικός αυτός νόμος σε απλό ορισμό της δύναμης. Για να αποφευχθεί αυτό, πρέπει η τελευταία να καθορίζεται από άλλους ανεξάρτητους νόμους και να μπορεί να προσδιορισθεί από μετρήσεις μη κινητικού χαρακτήρα. Με άλλα λόγια, για να έχει ο νόμος κίνησης ουσιαστικό περιεχόμενο, πρέπει να βρει κανείς απαντήσεις σε ερωτήματα του τύπου: ποιες είναι οι γενικές ιδιότητες των δυνάμεων; Πόσες κατηγορίες δυνάμεων υπάρχουν; Για κάθε κατηγορία δυνάμεων ποια φυσικά μεγέθη τις καθορίζουν; Ποίοι είναι οι συγκεκριμένοι νόμοι βάσει των οποίων προσδιορίζεται το μέγεθος των δυνάμεων;

Σχολιάζοντας περισσότερο την έννοια της δύναμης. Όσον αφορά τη μέτρηση μιας δύναμης, υπάρχει βέβαια η περίπτωση χρήσης του ελατηρίου-

δυναμόμετρου που μας δημιουργεί τη σιγουριά ότι μπορούμε με κάτι χειροπιαστό να τη μετρήσουμε. Τόσο όμως ο ορισμός (το 'λέγεται') όσο και η φυσική σημασία (το 'είναι') αυτής της έννοιας, βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση από τις παραμορφώσεις που προκαλούνται στα διάφορα ελατήρια.

Η έννοια της δύναμης κατάγεται από τις ανθρώπινες μυϊκές προσπάθειες. Χιλιετηρίδες ολόκληρες πριν η λέξη χρησιμοποιηθεί από τη Φυσική, ο άνθρωπος έκοβε ξύλα, μετακινούσε βαριά αντικείμενα, τέντωνε το τόξο του και έκανε κουπί αξιοποιώντας τις μυϊκές του δυνατότητες. Σήμερα, στις καθημερινές μας κουβέντες, η λέξη εμφανίζεται με αρκετά μεγάλη συχνότητα, καθώς συμμετέχει σε φράσεις όπως 'η δύναμη του χαρακτήρα', 'η δύναμη της φωνής', 'η δύναμη της συνήθειας'.

Στη γλώσσα της Φυσικής τα πράγματα είναι διαφορετικά. Η δύναμη ενώ από τη μια εξακολουθεί να σχετίζεται με ενέργειες σαν αυτές που περιγράφουν τα ρήματα 'σπρώχνω', 'τραβάω', 'πιέζω', 'κτυπώ', 'συγκρατώ', από την άλλη επεκτείνεται πολύ πιο πέρα από την ανθρώπινη εμπειρία καθώς αποτελεί ένα από τα εκφραστικά μέσα που χρησιμοποιεί η επιστήμη προκειμένου να περιγράψει τις ποικίλες αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα υλικά σώματα.

Η δύναμη όμως δεν είναι μόνο έννοια είναι και μέγεθος. Η μέτρησή της μπορεί να γίνει από τις μεταβολές της ταχύτητας που προκαλεί ($\vec{F} = m\vec{\alpha}$ ή $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$) ή τις παραμορφώσεις που προκαλεί (N. Hooke στις ελαστικές παραμορφώσεις). Ο στόχος είναι να μετρήσουμε αλλά όχι μόνο να μετρήσουμε. Χρειάζεται παραπέρα να κατανοηθεί, ότι οι δυνάμεις που τεντώνουν τα ελατήριά μας, είναι εννοιολογικά ταυτόσημες με τις δυνάμεις που αναγκάζουν τους πλανήτες να διαγράφουν ελλειπτικές περιφορές γύρω από τον Ήλιο όσο και με τις δυνάμεις που 'βάζουν σε κίνηση' τους ποικίλων εφαρμογών ηλεκτρικούς κινητήρες.

<u>Μάζα.</u> Όπως προκύπτει από το βασικό νόμο της κίνησης, η μάζα είναι ένα μέτρο του πόσο δύσκολο είναι να επιταχύνει κανείς μία δοσμένη ποσότητα ύλης.

Κάθε κομμάτι ύλης , έχει μία συγκεκριμένη σταθερή μάζα ανεξάρτητη από τις εξωτερικές δυνάμεις που ενδεχομένως ασκούνται πάνω στην ύλη αυτή και ανεξάρτητη – σύμφωνα με την Κλασική Μηχανική- από την κινητική κατάστασή της.

Επομένως για κάθε κομμάτι ύλης αρκεί να προσδιορίσουμε μια για πάντα πόση είναι η μάζα του. Ο προσδιορισμός αυτός μπορεί να γίνει βάσει του νόμου της κίνησης με το να ασκήσουμε την πρότυπη δύναμη F_0 πάνω στο υπόψη κομμάτι ύλης και να μετρήσουμε την προκύπτουσα επιτάχυνση α_0. Το πηλίκο F_0/α_0, σύμφωνα με το νόμο θα μας δώσει τη μάζα m.

Η μάζα στη φύση δεν εμφανίζεται μόνο ως μέτρο της δυσκολίας να αλλάξουμε την ταχύτητα (ή με άλλα λόγια ως μέτρο της αδράνειας ενός υλικού σώματος), αλλά και σαν πηγή και αποδέκτης των λεγόμενων βαρυτικών δυνάμεων. Επομένως υπάρχει ένας ακόμα ανεξάρτητος τρόπος προσδιορισμού της μάζας μέσω μέτρησης βαρυτικών δυνάμεων.

Τίθεται τώρα το εξής ερώτημα: Η μάζα που προσδιορίστηκε από τη σχέση F_0/α_0 (η οποία συνήθως αναφέρεται σαν αδρανειακή μάζα) και η μάζα η βαρυτική (που προσδιορίζεται από μετρήσεις βαρυτικών δυνάμεων), είναι πράγματι ακριβώς οι ίδιες ή μήπως υπάρχει κάποια μικρή διαφορά; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι ότι και οι πιο ακριβείς μετρήσεις που έχουν γίνει μέχρι σήμερα ,δεν έχουν διαπιστώσει διαφορά μεταξύ αδρανειακής και βαρυτικής μάζας. Επομένως και μέχρις αποδείξεως του αντίθετου, θεωρούμε ότι η βαρυτική και η αδρανειακή μάζες συμπίπτουν.

Τέλος μία πολύ σημαντική ιδιότητα της μάζας είναι η αθροιστικότητά της. Δηλαδή η μάζα ενός υλικού συστήματος ισούται με το άθροισμα των μαζών των μερών του. Ας σημειώσουμε όμως ότι τόσο η αθροιστικότητα της μάζας, όσο και η ανεξαρτησία της από την κινητική κατάσταση της ύλης, ισχύουν μόνο προσεγγιστικά.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4ο

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΤΑΧΥΤΗΤΑ –ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ-ΕΥΘ. ΟΜΑΛΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Ταχύτητα

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1)$$

Δηλαδή η ταχύτητα $\vec{u}$ ορίζεται σαν η οριακή τιμή του $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ καθώς το Δt τείνει στο μηδέν. Η οριακή αυτή τιμή γράφεται $\frac{d\vec{r}}{dt}$ και λέγεται παράγωγος του $\vec{r}$ ως προς t.

Η έννοια της ταχύτητας μας πληροφορεί για το πόσο γρήγορα αλλάζει η θέση του κινητού πάνω στην τροχιά του.

Επιτάχυνση

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad (2)$$

Δηλαδή η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ ορίζεται σαν η οριακή τιμή του $\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t}$ καθώς το Δt τείνει στο μηδέν. Η οριακή αυτή τιμή γράφεται $\frac{d\vec{u}}{dt}$ και λέγεται παράγωγος του $\vec{u}$ ως προς t.

Η αξία και η σημασία της έγκειται στο γεγονός ότι είναι αυτή που συνδέεται άμεσα με τη δύναμη. Γι' αυτό το λόγο αν και δεν την ΄΄βλέπουμε΄΄, την αισθανόμαστε έμμεσα σαν δύναμη (στροφή, φρενάρισμα, ξεκίνημα κ.λ.π.).

(1) (2) : $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση

Στην περίπτωση αυτή η κίνηση γίνεται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Ο ρυθμός μεταβολής της, η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$, είναι σταθερός κατά διεύθυνση και μέτρο, έχει δε σε αυτή ειδικά την περίπτωση μία επιπρόσθετη ιδιότητα: το διάνυσμα της μεταβολής της ταχύτητας $d\vec{\upsilon}$ σε κάθε χρονικό διάστημα dt, άρα και η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$, είναι συνεχώς παράλληλα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$.

Το γεγονός ότι στην περίπτωσή μας υποθέσαμε ότι $\vec{\alpha} = \sigma\tau\alpha\theta$ και ο περιορισμός ότι μελετάμε ένα σωμάτιο σταθερής μάζας ($m = \sigma\tau\alpha\theta$), μας οδηγούν στο συμπέρασμα βάσει του θεμελιώδους νόμου: $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}$, ότι η δύναμη που εξαναγκάζει ένα κινητό σε ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, είναι σταθερή κατά διεύθυνση και μέτρο και μάλιστα συνεχώς παράλληλη της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ αφού $\Sigma\vec{F} // \vec{\alpha}$.

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

Για $\vec{\alpha} = \sigma\tau\alpha\theta.$, άρα και μέτρο $\alpha = \sigma\tau\alpha\theta.$ παίρνουμε:

$$d\upsilon = \alpha dt$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \int_{t_0}^{t} \alpha dt = \alpha \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\upsilon - \upsilon_0 = \alpha(t - t_0)$$

Για

$$t_0 = 0, \quad \alpha\nu$$

$$\upsilon_0 = 0: \quad \upsilon = \alpha t$$

Ενώ αν

$$\upsilon_0 \neq 0: \quad \upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$$

Επίσης:

$$\frac{ds}{dt} = \upsilon + \alpha t$$

$$ds = \upsilon_0 dt + \alpha t dt$$

$$\int_{s_0}^{s} ds = \upsilon_0 \int_{t_0}^{t} dt + a \int_{t_0}^{t} t dt$$

$$s - s_0 = \upsilon_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} at(t^2 - t^2{}_0)$$

Για t_0=0:

$$s = s_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Αν υ_0=0

και s_0=0:

$$s = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

(Η επιτάχυνση α μπορεί να είναι θετική ή αρνητική)

Μονοδιάστατη κίνηση-Σταθερή επιτάχυνση

Ας περιορίσουμε τη μελέτη μας σε μία κίνηση, μονοδιάστατη (στον άξονα χ), για την οποία $α_Χ$=α σταθερή. Για μία τέτοια σταθερή επιτάχυνση, η μέση επιτάχυνση, για κάθε χρονικό διάστημα ,είναι ίση προς αυτή τη στιγμιαία επιτάχυνση $α_Χ$.

Έστω t_1=0 και έστω t_2 ένας τυχαίος χρόνος t. Έστω $υ_{Χ0}$ η τιμή της $υ_Χ$ τη χρονική στιγμή t=0 και έστω $υ_Χ$ η τιμή της την τυχαία χρονική στιγμή t. Με το συμβολισμό αυτό βρίσκουμε την $α_Χ$ από την:

$$a_x = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_\chi - \upsilon_{\chi 0}}{t - 0}$$

ή $\upsilon_\chi = \upsilon_{\chi 0} + a_\chi t$.

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τα εξής:

(α) Πέντε διαδοχικά “στιγμιότυπα” ευθύγραμμης κίνησης με σταθερή επιτάχυνση. Τα βέλη στις σφαίρες παριστάνουν την υ, ενώ τα από κάτω την α.

(β) Η μετατόπιση αυξάνεται ανάλογα με το τετράγωνο του χρόνου σύμφωνα με την $\chi = \upsilon_{\chi 0} t + \frac{1}{2} a_\chi t^2$ **(1)**

Η κλίση της αυξάνεται ομαλά και κάθε στιγμή έχει την τιμή της ταχύτητας $υ_Χ$. Ο ρυθμός αύξησης της κλίσης αυτής πρέπει να δίνει την επιτάχυνση $α_Χ$, που είναι σταθερή σ’ αυτή την περίπτωση. Η καμπύλη είναι παραβολή και η εξίσωση (1) είναι εξίσωση παραβολής με κλίση $υ_{Χ0}$ για t=0.

Με παραγώγιση της εξίσωσης (1) παίρνουμε:

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_{x0} + a_x t$$

ή $\upsilon_x = \upsilon_{x0} + a_x t$

η οποία δίνει την ταχύτητα $υ_Χ$ τη χρονική στιγμή t

και $\frac{d\upsilon_x}{dt} = a_x$

η οποία δίνει τη σταθερή επιτάχυνση.

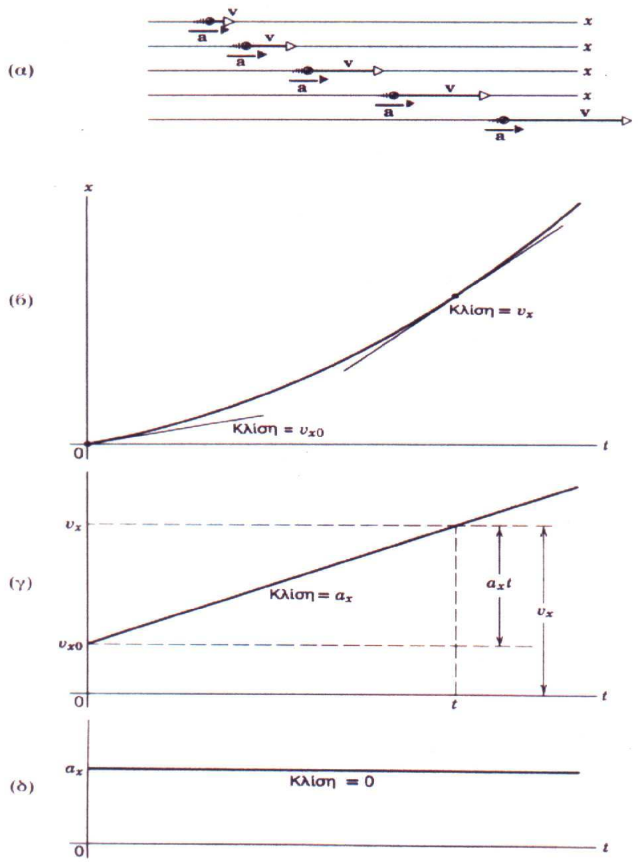
Η παράσταση της μετατόπισης σαν συνάρτηση του χρόνου για ομαλά επιταχυνόμενη ευθύγραμμη κίνηση, είναι λοιπόν πάντοτε παραβολή.

(γ) Η ταχύτητα $υ_Χ$ αυξάνεται ομαλά ακολουθώντας την σχέση $υ_Χ$=$υ_{Χ0}$+$α_Χ$t. Η κλίση της ευθείας $u_Χ$(t) είναι σταθερή και κάθε στιγμή έχει την τιμή της επιτάχυνσης $α_Χ$.

(δ) Η επιτάχυνση $α_Χ$ έχει σταθερή τιμή. Η κλίση της ευθείας $α_Χ$(t) είναι μηδέν.

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Υπολογισμός της επιτάχυνσης

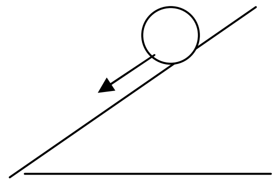


Εισαγωγή

Ο Γαλιλαίος στα πειράματά του σχετικά με την πτώση των σωμάτων αντιμετώπιζε δύο σοβαρά εμπόδια

1. **Δεν υπήρχαν αποτελεσματικοί τρόποι για να γίνει μερικό κενό**
2. **Δεν υπήρχαν συσκευές για χρονομέτρηση των σωμάτων με αρκετή ακρίβεια ώστε να παρθούν αξιόλογα αριθμητικά δεδομένα. Τα σώματα "βιάζονταν" πολύ να φθάσουν στο έδαφος και οι χρονομετρήσεις με τα όργανα της εποχής αδυνατούσαν να δώσουν κάτι αξιόπιστο. Παρ' όλα αυτά απέδειξε το συμπέρασμά του δείχνοντας πρώτα ότι ο χαρακτήρας της κίνησης μιας σφαίρας που κυλά σε κεκλιμένο επίπεδο είναι ο ίδιος με εκείνον της σφαίρας που πέφτει ελεύθερα. Το κεκλιμένο επίπεδο απλώς μειώνει την ενεργό επιτάχυνση της βαρύτητας στην κίνηση και κάνει πιο αργή την κίνηση οπότε μελετάται χρονικά καλύτερα.**

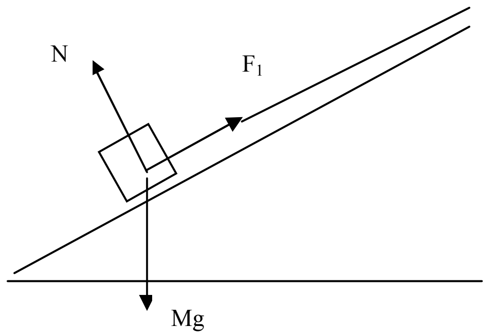
Μέτρησε το χρόνο με την κλεψύδρα νερού ένα όργανο γνωστό στους αρχαίους Έλληνες και τον χρησιμοποίησε για να ελέγξει την ταχύτητα και την επιτάχυνση της κίνησης.



Ο Γαλιλαίος έδειξε ότι αν η επιτάχυνση είναι σταθερή κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, το ίδιο πρέπει να γίνεται και με την επιτάχυνση της βαρύτητας g, διότι η πρώτη είναι απλώς μία συνιστώσα της δεύτερης και κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου σταθερής κλίσης ο λόγος των επιταχύνσεων παραμένει σταθερός.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Μελέτη της κίνησης ενός κύβου πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο



α) Στατική περίπτωση

Ο κύβος ηρεμεί πάνω στο επίπεδο με τη βοήθεια ενός σχοινιού.

Οι δυνάμεις που ασκούνται επάνω του φαίνονται στο σχήμα.

Ο κύβος θα εξασκήσει δυνάμεις πάνω σε άλλα σώματα του περιβάλλοντός του (το σχοινί, τη γη, την επιφάνεια του επιπέδου) σύμφωνα με την αρχή της δράσης-αντίδρασης. Οι δυνάμεις αυτές όμως δεν χρειάζονται για τον καθορισμό της κίνησης του κύβου γιατί δεν δρούν πάνω στον κύβο.

Αφού ο κύβος δεν επιταχύνεται παίρνουμε:

$$\vec{F}_1 + \vec{N} + M\vec{g} = 0$$

Είναι βολικό να διαλέξουμε τον άξονα χ του συστήματος αναφοράς μας παράλληλο με το επίπεδο και τον άξονα ψ κάθετο προς το επίπεδο. Έτσι μόνο η δύναμη Mg πρέπει να αναλυθεί σε συνιστώσες κατά τη λύση του προβλήματος. Οι δύο βαθμωτές εξισώσεις που λαμβάνονται, αν αναλύσουμε την Mg στους άξονες χ και ψ είναι:

F_1-Mgsinθ=0 και N-Mgcosθ=0

από τις οποίες μπορούν να υπολογιστούν οι F_1 και N αν δοθούν οι θ και M.

β) Δυναμική περίπτωση

1^{ov}. Αν υποθέσουμε ότι το σχοινί κόβεται, η F_1 δηλ. η δύναμη που ασκείται από το σχοινί στον κύβο δεν θα υπάρχει. Η συνισταμένη δύναμη στον κύβο δεν θα είναι πια μηδέν και ο κύβος θα επιταχυνθεί.

Άρα $Mg\sin\theta = M\alpha$

ή $\alpha = g\sin\theta$

Η επιτάχυνση έχει διεύθυνση προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με μέτρο gsinθ.

2^{ov}. Στην περίπτωση που το επίπεδο δεν είναι λείο, άρα υπάρχει δύναμη τριβής f και δεδομένου ότι ο συντελεστής τριβής είναι n, έχουμε:

$N - Mg\cos\theta = 0$ και $Mg\sin\theta = M\alpha$

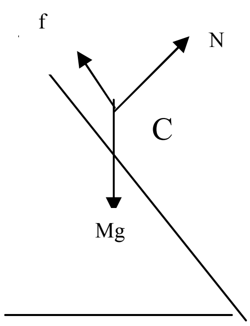
Οπότε: $Mg\sin\theta - \eta N = M\alpha$

$Mg\sin\theta - nMg\cos\theta = M\alpha$

$\alpha = g\sin\theta - ng\cos\theta$

δηλαδή η επιτάχυνση σε αυτή την περίπτωση είναι μικρότερη κατά την ποσότητα ngcosθ απ' ότι ήταν στο λείο επίπεδο.

Μελέτη της κίνησης ενός κυλίνδρου που κυλίεται προς τα κάτω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο:



Οι δυνάμεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Mg είναι το βάρος του κυλίνδρου που δρα κατακόρυφα στο κέντρο μάζας, N είναι η κάθετη δύναμη που εξασκεί το επίπεδο πάνω στον κύλινδρο και f είναι η δύναμη της στατικής τριβής που δρα κατά κατά μήκος του επιπέδου στο σημείο επαφής.

Η μεταφορική κίνηση ενός σώματος λαμβάνεται υποθέτοντας ότι όλες οι εξωτερικές δυνάμεις δρούν στο κέντρο μάζας του μάζας του Χρησιμοποιώντας το 2ο νόμο του Newton, έχουμε:

$$N - Mg\cos\theta = 0$$
$$Mg\sin\theta - f = Ma$$

Η πρώτη σχέση για την κίνηση την κάθετη προς το επίπεδο και η δεύτερη κατά μήκος του επιπέδου.

Η περιστροφική κίνηση γύρω από το κέντρο μάζας προκύπτει από την:

$$\tau = I_{cm}\,\underline{\alpha}$$

τ είναι η ροπή, I_{cm} η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς ένα άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας και $\underline{\alpha}$ η γωνιακή επιτάχυνση .

Ούτε η N ούτε η Mg μπορεί να προκαλέσει περιστροφή γύρω από το C γιατί οι γραμμές δράσεώς τους περνούν από το C και έχουν έτσι μηδενικούς βραχίονες ροπής. Η δύναμη της τριβής έχει ένα βραχίονα ροπής R γύρω από το C και έτσι

$$fR = I_{cm}\,\underline{\alpha}$$

όμως

$$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$$

και

$$\underline{\alpha} = \frac{\alpha}{R}$$

όπου α (ο αριθμητής)είναι η γραμμική επιτάχυνση του κέντρου μάζας.
οπότε

$$f = \frac{I_{cm}}{R}\underline{\alpha} = \frac{M\alpha}{2}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία, στη δεύτερη μεταφορική εξίσωση, βρίσκουμε ότι

$$\alpha = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για κάθε στιγμή ανεξάρτητα από τη θέση του κυλίνδρου πάνω στο επίπεδο. Το κέντρο μάζας κινείται με σταθερή γραμμική επιτάχυνση.

Σημειώνεται επίσης ότι η ελάχιστη δύναμη στατικής τριβής που απαιτείται για την κύλιση είναι

$$f = \frac{M\alpha}{2} = \frac{M}{2}\frac{2}{3}g\sin\theta = \frac{1}{3}Mg\sin\theta$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5^{o}

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Η διατήρηση της ενέργειας

Ισχύει το θεώρημα έργου-ενέργειας. Το θεώρημα αυτό λέει ότι, το έργο *W* που παράγει η συνισταμένη δύναμη F πάνω σε ένα σώμα κατά την κίνηση του από ένα σημείο σ' ένα άλλο, ισούται προς τη μεταβολή *ΔΚ* της κινητικής ενέργειας του σωματίου, ή

$$W = \Delta K \qquad (1)$$

Συνήθως πάνω σ' ένα σωμάτιο δρουν αρκετές δυνάμεις, όποτε ή συνισταμένη δύναμη F είναι το διανυσματικό άθροισμα τους, δηλαδή $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_2$, όπου έχουμε υποθέσει ότι οι δυνάμεις είναι *η* στον αριθμό. Το έργο που παράγει η συνισταμένη δύναμη F είναι το αλγεβρικό άθροισμα των έργων πού παράγει η κάθε μια δύναμη, ή $W = W_, + W_2 + \ldots + W_n$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας (Εξ. 1) σαν

$$W_, + W_2 + \cdots + W_n = \Delta K. \qquad (2)$$

Στις επόμενες παραγράφους θα μελετήσουμε συστήματα στα οποία πάνω σ' ένα σωμάτιο εξασκούνται διάφορα είδη δυνάμεων και θα υπολογίσουμε τα W_1, W_2, κ.λ.π. για τις δυνάμεις αυτές. Αυτό θα μας οδηγήσει στον ορισμό διαφόρων μορφών ενέργειας όπως δυναμική και κινητική ενέργεια. Η διαδικασία αυτή καταλήγει στη διαμόρφωση μιας από τις μεγάλες αρχές της επιστήμης, της αρχής διατηρήσεως της ενέργειας.

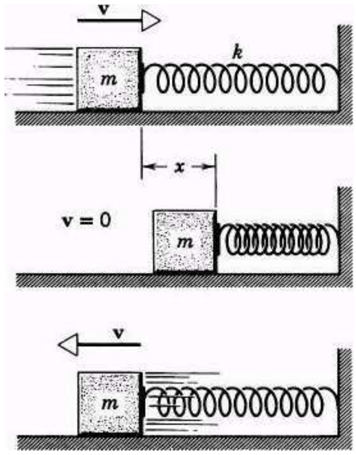
Συντηρητικές δυνάμεις

Ας κάνουμε πρώτα διάκριση μεταξύ δύο ειδών δυνάμεων, των συντηρητικών και των μη συντηρητικών. Θα θεωρήσουμε ένα παράδειγμα από κάθε είδος.

Έστω ένα ελατήριο, πού το ένα άκρο του στερεώνεται σ' ένα ακλόνητο τοίχο όπως στο Σχ.1. Ας σπρώξουμε ένα σώμα μάζας *m* με ταχύτητα v προς το ελατήριο. Υποθέτουμε ότι το οριζόντιο επίπεδο είναι εντελώς λείο και ότι το ελατήριο είναι ιδανικό, δηλαδή ότι υπακούει στο νόμο του *Hooke*

$$F = -KX \qquad (3)$$

όπου F ή δύναμη πού εξασκεί το ελατήριο όταν το ελεύθερο άκρο του μετατοπιστεί κατά χ. Υποθέτουμε ακόμα πως ή μάζα του ελατήριου είναι τόσο μικρή σε σχέση με εκείνη του σώματος, ώστε μπορούμε να αγνοήσουμε την κινητική ενέργεια του ελατήριου.



Σχ. 1 (α)Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται με ταχύτητα ν προς το ελατήριο. (β) Το σώμα ηρεμεί με τη δράση της δυνάμεως του ελατήριου, (γ) Το σώμα αποχτά ξανά την αρχική του ταχύτητα ν καθώς επιστρέφει στο σημείο που ξεκίνησε.

Έτσι στο σύστημα (σώμα + ελατήριο) όλη ή κινητική ενέργεια συγκεντρώνεται στο σώμα.

Όταν το σώμα έρθει σε επαφή με το ελατήριο η ταχύτητά του, άρα και ή κινητική του ενέργεια, αρχίζει να μειώνεται μέχρι πού τελικά το σώμα ηρεμεί εξ αιτίας της δράσης της δύναμης του ελατήριου, όπως στο Σχ.1β. Τώρα η κίνηση του σώματος αντιστρέφεται καθώς το συμπιεσμένο ελατήριο ανοίγει. Κερδίζει ταχύτητα και κινητική ενέργεια και, όταν ξανάρθει στην αρχική θέση επαφής του με το ελατήριο, βρίσκουμε ότι έχει την ίδια ταχύτητα και κινητική ενέργεια που είχε αρχικά, μόνο η φορά της κινήσεως έχει αλλάξει. Τα σώμα χάνει κινητική ενέργεια στη διάρκεια του πρώτου μέρους της κινήσεώς του αλλά ξαναπαίρνει όλη πάλι στη διάρκεια του δεύτερου μέρους της κίνησής του, καθώς επιστρέφει στο σημείο που ξεκίνησε (Σχ. 1γ).

Ερμηνεύσαμε την κινητική ενέργεια ενός σώματος σαν την ικανότητά του να παράγει έργο εξ αιτίας της κίνησής του. Είναι φανερό πως μετά τη συμπλήρωση ενός ολόκληρου ταξιδιού, η ικανότητα του σώματος του Σχ. 1 να κάνει έργο παραμένει η ίδια. Έχει σ υ ν τ η ρ η θ ε ί. Η ελαστική δύναμη που εξασκεί ένα ιδανικό ελατήριο, αλλά και οι άλλες δυνάμεις που συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο, λέγονται σ υ ν τ η ρ η τ ι κ έ ς. Η δύναμη της βαρύτητας είναι επίσης συντηρητική. Αν ρίξουμε μια μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω, θα επιστρέψει στα χέρι μας (αν υποθέσουμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα), με την ίδια κινητική ενέργεια πού είχε όταν έφευγε από το χέρι μας.

Αν όμως ένα σωμάτιο πάνω στο *οποίο* δρουν μια ή περισσότερες δυνάμεις επιστρέφει στην αρχική θέση του, είτε με περισσότερη είτε με λιγότερη κινητική ενέργεια απ' ότι είχε αρχικά, τότε σ' ένα πλήρη κύκλο η ικανότητά του να κάνει έργο έχει μεταβληθεί. Στην περίπτωση αυτή η ικανότητά του για παραγωγή έργου **δ ε ν** έχει συντηρηθεί και τουλάχιστο μια από τις δυνάμεις θα χαρακτηριστεί σα μη **σ υ ν τ η ρ η τ ι κ ή.**

Για την ερμηνεία των μη συντηρητικών δυνάμεων ας υποθέσουμε ότι οι επιφάνειες του σώματος και του επίπεδου, στο Σχ. 1, δεν είναι λείες, αλλά ότι το επίπεδο εξασκεί μια δύναμη τριβής f πάνω στον κύβο. Η δύναμη τριβής αντιστέκεται στην κίνηση του σώματος ανεξάρτητα από τη φορά της κίνησής του και βρίσκουμε ότι το σώμα επιστρέφει στο σημείο που ξεκίνησε με **λ ι γ ό τ ε ρ η** κινητική ενέργεια απ' αυτή πού είχε αρχικά. Αφού στο πρώτο πείραμά μας δείξαμε ότι η δύναμη του ελατήριου ήταν συντηρητική, πρέπει να αποδώσουμε το νέο αυτό αποτέλεσμα στη δράση της δυνάμεως τριβής. Λέμε ότι η δύναμη αυτή και οι άλλες δυνάμεις πού δρουν με τον ίδιο τρόπο, είναι μη **σ υ ν τ η ρ η τ ι κ έ ς.** Η δύναμη επαγωγής σ' ένα βήτατρο είναι επίσης μια μη συντηρητική δύναμη. Αντί όμως να δαπανά κινητική ενέργεια, παράγει, έτσι που ένα ηλεκτρόνιο το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά στο βήτατρο, επιστρέφει στην αρχική θέση του με **π ε ρ ι σ σ ό τ ε ρ η** κινητική ενέργεια απ' αυτή που αρχικά είχε. Σ' έναν πλήρη κύκλο το ηλεκτρόνιο κερδίζει κινητική ενέργεια, όπως πρέπει να συμβαίνει όταν το βήτατρο είναι αποτελεσματικό.

Μπορούμε να ορίσουμε τη συντηρητική δύναμη από μια άλλη άποψη, εκείνη του έργου που παράγει η δύναμη πάνω στο σωμάτιο. Στο πρώτο παράδειγμα μας παραπάνω, το έργο πού παράγει η ελαστική δύναμη του ελατήριου πάνω στο σώμα, κατά τη συμπίεση του ελατήριου, είναι αρνητική, γιατί η δύναμη πού εξασκεί το ελατήριο πάνω στο σώμα (προς τα αριστερά στο Σχ. 1α) έχει αντίθετη φορά από τη φορά της μετατοπίσεως του σώματος (προς τα δεξιά στο Σχ. 1α). Όταν το ελατήριο τεντώνεται το έργο που παράγει η δύναμη του ελατήριου πάνω στα σώμα είναι θετικό (δύναμη και μετατόπιση έχουν την ίδια φορά). Στο πρώτο παράδειγμα μας το ολικό έργο που παράγει η δύναμη του ελατήριου πάνω στο σώμα στη διάρκεια ενός πλήρους κύκλου είναι μηδέν.

Στο δεύτερο παράδειγμα μας θεωρήσαμε το αποτέλεσμα της δύναμης τριβής. Το έργο που παράχθηκε από τη δύναμη αυτή πάνω στο σώμα, είναι αρνητικό και στους δύο κύκλους, γιατί ή δύναμη τριβής αντιστέκεται πάντοτε στην κίνηση. Άρα το έργο που παράγει η τριβή σ' ένα ολόκληρο κύκλο δεν μπορεί να είναι μηδέν. Γενικά λοιπόν: ***Μ ι α δ ύ ν α μ η ε ί ν α ι σ υ ν τ η ρ η τ ι κ ή αν το έ ρ γ ο π ο υ π α ρ ά γ ε ι η δ ύ ν α μ η α υ τ ή π ά ν ω σ τ ο κ ι ν ο ύ μ ε ν ο σ ω μ ά τ ι ο, σ ε***

οποιαδήποτε τυχαία κλειστή διαδρομή, είναι μηδέν. Μια δύναμη δεν είναι συντηρητική αν το έργο που παράγει η δύναμη πάνω στο κινούμενο σωμάτιο σ'έναν πλήρη κύκλο δεν είναι μηδέν.

Το θεώρημα έργου-ενέργειας δείχνει πώς ο δεύτερος αυτός τρόπος ορισμού των συντηρητικών και μη συντηρητικών δυνάμεων είναι τελείως ισοδύναμος προς τον πρώτο ορισμό μας. Αν δεν υπάρχει μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σωματίου που διαγράφει ένα κλειστό δρόμο, τότε $\Delta K = 0$ και, από την Εξ. 1, W = 0 και η συνισταμένη δύναμη πού δρα στο σωμάτιο πρέπει να είναι συντηρητική. Ομοίως, αν

$$\Delta K \neq 0$$

τότε, από την Εξ. 1,

$$W \neq 0$$

και τουλάχιστο μια από τις εξασκούμενες δυνάμεις πρέπει να είναι μη συντηρητική.

Μπορούμε να δούμε το θέμα αυτό πιο λεπτομερειακά. Όταν υπάρχει τριβή στο σύστημα του Σχ. 1, πάνω στο σώμα εξασκούνται τέσσερις δυνάμεις και η συνισταμένη δύναμη είναι

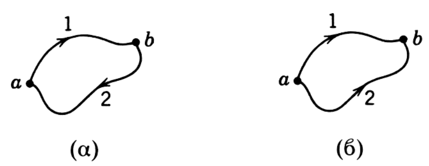
$$F = F_s + W + N + f$$

όπου οι δυνάμεις είναι η δύναμη του ελατήριου F_s, το βάρος του σώματος W, η κάθετη δύναμη N πού εξασκεί το επίπεδο πάνω στο σώμα και η δύναμη τριβής f. Μπορούμε να γράψουμε την Εξ. 2, το θεώρημα έργου-ενέργειας δηλαδή, σαν

$$W_s + W_w + W_N + W_f = \Delta K,$$

όπου οι όροι στα αριστερά είναι το έργο που παράγουν πάνω στο σώμα οι παραπάνω τέσσερις δυνάμεις. Έχουμε δει ότι για ένα κλειστό δρόμο $W_s = 0$. Ομοίως, $W_w = W_N = 0$ γιατί οι αντίστοιχες δυνάμεις είναι κάθετες προς τη μετατόπιση του σώματος. Έτσι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας οφείλεται αποκλειστικά στο W_f, *το* έργο που παράγει η δύναμη τριβής.

Μπορούμε να δούμε τη διαφορά μεταξύ συντηρητικών και μη συντηρητικών δυνάμεων και μ' ένα τρίτο τρόπο.



Σχ. 2

Υποθέστε ότι ένα σωμάτιο κινείται από το *a* στο *b* πάνω στο δρόμο 1 και γυρίζει πίσω από το *b* στο *a* από το δρόμο 2, όπως στο Σχ. 2α. Πάνω στο σωμάτιο μπορούν να εξασκούνται αρκετές δυνάμεις στη διάρκεια αυτού του κλειστού ταξιδιού. Θεωρούμε κάθε δύναμη ξεχωριστά. Αν η θεωρούμενη δύναμη είναι συντηρητική, το έργο πού παράγει πάνω στα σωμάτιο η συγκεκριμένη αυτή δύναμη στη κλειστή διαδρομή είναι μηδέν

ή $$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0,$$

που μπορούμε να γράψουμε σαν

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2}$$

Δηλαδή τα έργο για να πάμε από το *a* στο *b* από το δρόμο 1 είναι το αντίθετο του έργου για να πάμε από το *b* στο *a* από το δρόμο 2. Αν όμως αναγκάσουμε το σωμάτιο να πάει από το *a* στο *b* από το δρόμο 2, όπως φαίνεται στο Σχ. 2β, απλώς αντιστρέφουμε τη φορά της προηγούμενης κίνησης μέσω του δρόμου 2 και έτσι

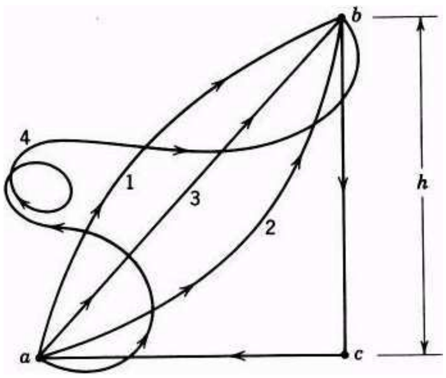
$$W_{ab,2} = -W_{ba,2}$$

Άρα

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$

που μας λέει ότι τα έργο που παράγει πάνω στα σωμάτιο μια συντηρητική δύναμη στη διαδρομή από το *a* στο *b* είναι το ίδιο και για τους δυο δρόμους.

Οι δρόμοι 1 και 2 μπορούν να είναι οποιοιδήποτε, φτάνει να πηγαίνουν από το *a* στο *b*· και τα σημεία *a* και *b* μπορούν να είναι οποιαδήποτε δύο σημεία. Βρίσκουμε πάντα το ίδιο αποτέλεσμα αν η δύναμη είναι συντηρητική. Άρα έχουμε ένα άλλο ισοδύναμο ορισμό των συντηρητικών και μη συντηρητικών δυνάμεων :



Σχ. 3 Μια πέτρα ανυψώνεται από το a στο b από διάφορους δρόμους 1,2, 3 και 4.

Μια δύναμη είναι συντηρητική, αν το έργο πού παράγεται απ' αυτή πάνω σ' ένα σωμάτιο πού κινείται μεταξύ δύο σημείων, εξαρτάται μόνο από τα σημεία αυτά και όχι από τον α-κολουθούμενο δρόμο. Μια δύναμη είναι μησυντηρητική αν το έργο πού παράγει η δύναμη αυτή, πάνω σ' ένα σωμάτιο πού κινείται

μεταξύ δύο σημείων, εξαρτάται από τον ακολουθούμενο μεταξύ των δύο αυτών σημείων δρόμο.

Για να αποσαφηνίσουμε αυτό τον τρίτο (ισοδύναμο) ορισμό των συντηρητικών δυνάμεων, ας εξετάσουμε τις βαρυτικές δυνάμεις που είναι συντηρητικές. Υποθέτουμε ότι πιάνουμε στα χέρια μας μια πέτρα μάζας *m* και την ανεβάζουμε σε ύψος *h* πάνω από το έδαφος, πηγαίνοντας από το *a* στο *b,* από αρκετούς διαφορετικούς δρόμους, όπως στο Σχ. 3. Ξέρουμε ήδη πως σ' ένα κλειστό δρόμο το ολικό έργο που παράγει μια συντηρητική δύναμη είναι μηδέν και ότι η δύναμη της παγκόσμιας έλξης είναι συντηρητική. Το έργο που παράγει πάνω στην πέτρα η βαρύτητα κατά την επιστροφή *bca* είναι απλώς *mgh.* Άρα, αφού ή βαρύτητα είναι μια συντηρητική δύναμη, το έργο που παράγει η βαρύτητα πάνω στην πέτρα, κατά μήκος οποιουδήποτε δρόμου από το *a* στο *b,* πρέπει να είναι *-mgh,* γιατί μόνο αν είναι έτσι το ολικό έργο πού παράγεται από τη βαρύτητα σ' ένα κλειστό ταξίδι θα είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει πώς η βαρύτητα προσφέρει αρνητικό έργο πάνω στην πέτρα καθώς κινείται από το *a* στο *b,* ή για να το τοποθετήσουμε αλλιώς, το έργο πρέπει να παράγεται αντίθετα προς τη βαρύτητα κατά μήκος οποιουδήποτε από τους δρόμους *ab.* Μπορούμε να υπολογίσουμε απ' ευθείας ότι το έργο που παράγει η βαρύτητα κατά μήκος οποιουδήποτε δρόμου *ab* ισούται προς *-mgh.* Γιατί οποιοσδήποτε απ' αυτούς τους δρόμους μπορεί να αναλυθεί σε απειροστές μετατοπίσεις που είναι διαδοχικά οριζόντιες και κατακόρυφες. Στις οριζόντιες μετατοπίσεις δεν παράγεται έργο από τη βαρύτητα και η συνολική κατακόρυφη μετατόπιση είναι η ίδια σ' όλες τις περιπτώσεις. Άρα το έργο που παράγει η βαρύτητα πάνω στην πέτρα κατά την κίνηση της από το *a* στο *b,* εξαρτάται μόνο από τις θέσεις *a* και *b* και καθόλου από τον ακολουθούμενο δρόμο.

Για μια μη συντηρητική δύναμη, όπως η τριβή, το παραγόμενο έργο δεν είναι ανεξάρτητο του δρόμου που ακολουθείται μεταξύ των δύο σταθερών σημείων. Χρειάζεται μόνο να επισημάνουμε ότι καθώς σπρώχνουμε ένα σώμα πάνω σ' ένα (ανώμαλο) τραπέζι μεταξύ δύο σημείων *a* και *b* από διάφορους δρόμους, η διανυόμενη απόσταση μεταβάλλεται, όπως επίσης και το παραγόμενο από τη δύναμη τριβής έργο. Αυτό εξαρτάται από το δρόμο.

Οι ορισμοί της συντηρητικής δύναμης, που έχουμε δώσει, είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους. Ποιο θα χρησιμοποιήσουμε εξαρτάται μόνο από το ποιος μας συμφέρει. Ο ορισμός με τους κλειστούς δρόμους δείχνει καθαρά πως ή κινητική ενέργεια διατηρείται, όταν δρουν συντηρητικές δυνάμεις. Για να αναπτύξουμε την ιδέα της δυναμικής ενέργειας όμως, προτιμάται ο ορισμός που λέει ότι το έργο είναι ανεξάρτητο από το δρόμο.

Δυναμική ενέργεια

Στην παράγραφο αυτή θα συγκεντρώσουμε την προσοχή μας όχι στο κινούμενο σώμα του Σχ. 1, αλλά στο (απομονωμένο) σύστημα (σώμα + ελατήριο). Αντί να λέμε ότι το σώμα κινείται, προτιμάμε στη θεώρηση αυτή, να λέμε ότι η κατάσταση του συστήματος μεταβάλλεται. Μετράμε τόσο τη θέση του σώματος, όσο και την κατάσταση του συστήματος σε κάθε στιγμή χρησιμοποιώντας την ίδια παράμετρο *χ,* δηλαδή τη μετατόπιση του ελεύθερου άκρου του ελατήριου από την κανονική θέση του, που αντιστοιχεί σε ελεύθερο ελατήριο. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι η ίδια με εκείνη του σώματος, γιατί έχουμε υποθέσει πώς το ελατήριο δεν έχει μάζα.

Έχουμε δει πως η κινητική ενέργεια του συστήματος του Σχ. 1 μειώνεται στη διάρκεια του πρώτου μισού της κινήσεως, γίνεται μηδέν και ακολούθως αυξάνεται στο δεύτερο μισό της κινήσεως. Αν δεν υπάρχει τριβή η κινητική ενέργεια του συστήματος ξαναπαίρνει την αρχική τιμή της, όταν ξαναβρεθεί στην αρχική κατάσταση του.

Κάτω απ' αυτές τις συνθήκες (όταν δρουν συντηρητικές δυνάμεις) εισάγουμε την έννοια της ενέργειας καταστάσεως, ή δυναμικής ενέργειας *U* και λέμε ότι αν η Κ του συστήματος μεταβληθεί κατά ΔΚ όταν μεταβληθεί η διάταξη των σωμάτων (δηλαδή όταν το σώμα του συστήματος του Σχ. 1 κινείται), τότε η *U του* συστήματος πρέπει να μεταβληθεί κατά ένα ίσο ποσό αντιθέτως, ώστε το άθροισμα των δύο μεταβολών να είναι μηδέν, ή

$$\Delta K + \Delta U = 0. \qquad (4\alpha)$$

Αλλιώς, λέμε ότι οποιαδήποτε μεταβολή της κινητικής ενέργειας *Κ* του συστήματος αντισταθμίζεται από μια ίση και αντίθετη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας *U* του συστήματος, ώστε το άθροισμα τους να παραμένει σταθερό στη διάρκεια της κινήσεως, ή

$$K + U = \text{σταθερό}. \qquad (4\beta)$$

Η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος παριστάνει μια μορφή αποθηκευμένης ενέργειας, που μπορεί πλήρως να μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια. Δεν μπορούμε να συνδέσουμε τη δυναμική ενέργεια με μια μη συντηρητική δύναμη, όπως είναι η δύναμη τριβής, γιατί ή κινητική ενέργεια ενός συστήματος πάνω στο οποίο δρουν τέτοιες δυνάμεις, δεν ξαναπαίρνει την αρχική τιμή της όταν τα σύστημα επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση.

Οι Εξ. 4 ισχύουν για κλειστά συστήματα σωμάτων που αλληλεπιδρούν, όπως το σύστημα (σώμα + ελατήριο) του Σχ. 1. (Είναι όμως στην πραγματικότητα

αυτό το σύστημα κλειστό;). Στο παράδειγμα αυτό, επειδή θεωρούμε το ελατήριο πρακτικά χωρίς μάζα, η κινητική ενέργεια μπορεί να συνδεθεί μόνο με την κινούμενη μάζα. Το σώμα επιβραδύνεται (ή επιταχύνεται) γιατί πάνω του εξασκείται η δύναμη από το ελατήριο. Είναι λογικό λοιπόν να συνδέσουμε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος με τη δύναμη αυτή, δηλαδή με το ελατήριο. Έτσι στην απλή αυτή περίπτωση λέμε ότι η κινητική ενέργεια, που έχει η μάζα, ελαττώνεται στη διάρκεια του πρώτου μέρους της κινήσεως, ενώ η δυναμική ενέργεια, που αποταμιεύεται στο ελατήριο, αυξάνεται στη διάρκεια αυτού του ίδιου χρόνου.

Οι Εξ. 4 είναι ουσιαστικά λογιστικές αναλύσεις για την ενέργεια. Αυτές οι εξισώσεις, καθώς και η έννοια της δυναμικής ενέργειας, δεν έχουν πραγματική σημασία αν δεν βρούμε τρόπο υπολογισμού της U, σε συνάρτηση της καταστάσεως του συστήματος, μέσα στο οποίο δρουν οι συντηρητικές δυνάμεις- στο παράδειγμα του Σχ. 1 αυτό σημαίνει ότι πρέπει να κατορθώσουμε να υπολογίσουμε το *U(x), ό*που *χ* ή μετατόπιση του ελατηρίου.

Για να ξεκαθαρίσουμε την έννοια της δυναμικής ενέργειας *U,* ας θεωρήσουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας, *W* = ΔΚ, όπου W είναι το έργο πού παράγει η συνισταμένη δύναμη πάνω σ' ένα σωμάτιο καθώς κινείται από το α στο *b.* Για λόγους απλότητας ας υποθέσουμε ότι μόνο μια δύναμη F εξασκείται πάνω στο σωμάτιο. Αυτό ισχύει στην ουσία για τα σύστημα του Σχ. 1. Αν ή F είναι συντηρητική μπορούμε να συνδυάσουμε το θεώρημα έργου- ενέργειας (Εξ.1) με την Εξ. 4α, οπότε παίρνουμε

$$W = \Delta K = -\Delta U \qquad (5\alpha)$$

Το έργο *W* πού παράγει μια συντηρητική δύναμη εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο της κινήσεως και όχι από τον ακολουθούμενο μεταξύ τους δρόμο. Μια τέτοια δύναμη μπορεί να εξαρτάται μόνο από τη θέση ενός σωματίου. Δεν εξαρτάται από την ταχύτητα του σωματίου ή τον χρόνο, για παράδειγμα. Σε μονοδιάστατη κίνηση, η Εξ. 5α γίνεται

$$\Delta U = -W = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx \qquad (5\beta)$$

όπου το σωμάτιο κινείται από το χ_0 στο *χ. Η* Εξ. 5β δείχνει τον τρόπο υπολογισμού της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ΔU όταν ένα σωμάτιο, πάνω στο οποίο δρα μια συντηρητική δύναμη *F(x),* κινείται από το σημείο *α,* πού καθορίζεται με το χ_0, στο σημείο *b,* που καθορίζεται με το *χ*. Η εξίσωση δείχνει ότι

μπορούμε να υπολογίσουμε την ΔU αν η δύναμη F εξαρτάται μόνο από τη θέση του σωματίου (δηλαδή από την κατάσταση του συστήματος), που είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι η δυναμική ενέργεια έχει νόημα μόνο για συντηρητικές δυνάμεις.

Τώρα πού ξέρουμε ότι η δυναμική ενέργεια *U* εξαρτάται μόνο από τη θέση του σωματίου, μπορούμε να γράψουμε την Εξ. 4β σαν

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E \qquad \text{(μια διάσταση) (6α)}$$

όπου η *E,* πού μένει σταθερή όταν κινείται το σωμάτιο, ονομάζεται ολική μηχανική ενέργεια. Υποθέτουμε ότι το σωμάτιο κινείται από το σημείο *α* (όπου η θέση του είναι χ_0 και η ταχύτητα του v_0) στα σημείο *b* (όπου η θέση του είναι χ και ή ταχύτητα του v). Η ολική μηχανική ενέργεια *E* πρέπει να είναι η ίδια για κάθε σχηματισμό του συστήματος όταν η δύναμη είναι συντηρητική, ή, από την Εξ. 6α

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + U(x_0). \qquad (6\beta)$$

Η ποσότητα στα δεξιά εξαρτάται μόνο από την αρχική θέση χ_0 και την αρχική ταχύτητα v_0, πού έχουν καθορισμένες τιμές. Είναι λοιπόν σταθερή στη διάρκεια της κινήσεως. Αυτή είναι η σταθερή ολική μηχανική ενέργεια *E.* Παρατηρούμε ότι η δύναμη και η επιτάχυνση δεν εμφανίζονται στην εξίσωση αυτή, μόνο η θέση και η ταχύτητα εμφανίζονται. Οι Εξ. 6 ονομάζονται συχνά νόμος διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας για συντηρητικές δυνάμεις.

Σε πολλά προβλήματα βρίσκουμε ότι, παρ' όλο που μερικές από τις δυνάμεις δεν είναι συντηρητικές, είναι τόσο μικρές ώστε μπορούμε να τις αγνοήσουμε. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις Εξ. 6 σα μια καλή προσέγγιση. Για παράδειγμα, η αντίσταση του αέρα μπορεί να υπάρχει αλλά μπορεί η επίδρασή της πάνω στην κίνηση να είναι τόσο μικρή ώστε να μπορούμε να την αγνοήσουμε.

Παρατηρούμε ότι, αντί να ξεκινάμε με τους νόμους του *Newton,* μπορούμε να απλοποιούμε τη λύση προβλημάτων, όταν εξασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις, ξεκινώντας με τις Εξ. 6. Η σχέση αυτή προκύπτει βέβαια από τους νόμους του *Newton,* αλλά είναι ένα βήμα πιο κοντά στη λύση (λεγόμενη πρώτο ολοκλήρωμα της κινήσεως). Συχνά λύνουμε προβλήματα χωρίς να αναλύουμε τις δυνάμεις ή να γράφουμε τους νόμους του *Newton,* αναζητώντας αντί γι' αυτά,

μια ποσότητα στην κίνηση που να είναι σταθερή. Εδώ η μηχανική ενέργεια είναι σταθερή και μπορούμε να γράψουμε τις Εξ. 6 σαν πρώτο βήμα.

Σε μονοδιάστατη κίνηση μπορούμε επίσης να γράψουμε τη σχέση μεταξύ δυνάμεως και δυναμικής ενέργειας (Εξ. 5β) σαν

$$F(x) = -\frac{dU_x}{dx} \qquad (7)$$

Η Εξ. 7 μας δίνει μια άλλη όψη της δυναμικής ενέργειας. *Η δυναμική ενέργεια είναι μια συνάρτηση θέσεως, της οποίας το αντίθετο της παραγώγου μας δίνει τη δύναμη.*

Έστω ότι ένα σωμάτιο κινείται από το *α* στο *b* πάνω στον άξονα *χ* και ότι πάνω του εξασκείται μόνο μια συντηρητική δύναμη *F(x).* Για να αποδώσουμε μια τιμή στη δυναμική ενέργεια U_b στο σημείο *b,* ας γράψουμε

$$\Delta U = U_b - U_\alpha,$$

ή (βλέπε Εξ. 5β)

$$U_b = \Delta U + U_\alpha = -\int_{x_\alpha}^{x_b} F(x)dx + U_\alpha \quad (8)$$

Δεν μπορούμε να αποδώσουμε μια τιμή στην U_b εκτός κι αν αποδώσουμε τιμή στην U_α. Αν το σημείο *b* είναι οποιαδήποτε τυχαία θέση *χ,* ώστε $U_b = U(x)$, δίνουμε νόημα στο *U(x)* εκλέγοντας το σημείο *α* ώστε να είναι ένα βολικό σημείο αναφοράς, που καθορίζεται από το $\chi_\alpha = \chi_0$ και δίνοντας μια τιμή στη δυναμική ενέργεια $U_\alpha = U(x_0)$ όταν το σώμα βρίσκεται στο σημείο αυτό. Έτσι η Εξ. 8 γίνεται

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx + U(x_0) \qquad (9)$$

Δηλαδή η δυναμική ενέργεια σε κάθε σημείο εξαρτάται από την τιμή που διαλέγουμε για το σημείο αναφοράς.

Είναι συχνά βολικό να διαλέγουμε σα σημείο αναφοράς χ_0 εκείνο στο οποίο η δύναμη πάνω στο σωμάτιο είναι μηδέν. Έτσι η δύναμη που εξασκεί ένα ελατήριο είναι μηδέν όταν βρίσκεται στην κανονική ατέντωτη κατάσταση του. Λέμε συνήθως πώς στην κατάσταση αυτή η δυναμική ενέργεια είναι επίσης μηδέν. Επίσης η έλξη της γης πάνω σ' ένα σώμα μειώνεται καθώς το σώμα απομακρύνεται από τη γη και γίνεται μηδέν σε άπειρη απόσταση. Παίρνουμε συνήθως το άπειρο σαν τα σημείο αναφοράς μας και αποδίνουμε την τιμή μηδέν στη δυναμική ενέργεια της δυνάμεως βαρύτητας στο σημείο αυτό. Μέχρι τώρα όμως ασχοληθήκαμε με τη δύναμη βαρύτητας πάνω σε σώματα όπως οι μπάλες

του *baseball* κ.λ.π., που, σε σχέση με την ακτίνα της γης, δεν απομακρύνονται πολύ από τη γήινη επιφάνεια. Εδώ η δύναμη βαρύτητας (W= mg) είναι ουσιαστικά σταθερή και το βρίσκουμε βολικό να παίρνουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας, όχι στο άπειρο, αλλά στην επιφάνεια της γης.

Η μεταβολή των συντεταγμένων του συνηθισμένου σημείου αναφοράς χ_0 ή της αυθαίρετης τιμής που αποδίνεται στην $U(x_0)$ έχει απλώς σα συνέπεια τη μεταβολή της τιμής της $U(x)$ κατά μια προσθετική σταθερά. Η παρουσία μιας αυθαίρετης προσθετικής σταθεράς στην έκφραση της δυναμικής ενέργειας (Εξ. 9) δεν διαφοροποιεί τις εξισώσεις που έχουμε γράψει μέχρι τώρα. Απλώς προσθέτει τον ίδιο σταθερό όρο σε κάθε πλευρά της Εξ. 6β, για παράδειγμα, αφήνοντας την εξίσωση αυτή αμετάβλητη. Ακόμη, η μεταβολή της $U(x)$ κατά μια προσθετική σταθερά δεν μεταβάλλει τη δύναμη που υπολογίζεται από την Εξ. 7, γιατί η παράγωγος μιας σταθεράς είναι μηδέν. Όλα αυτά σημαίνουν πως η εκλογή ενός σημείου αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια δεν επηρεάζει τους υπολογισμούς μας γιατί ασχολούμαστε πάντα με δ ι α φ ο ρ έ ς δυναμικής ενέργειας και όχι με απόλυτες τιμές της δυναμικής ενέργειας σ' ένα δοσμένο σημείο.

Για να προσδιορίσουμε την ταχύτητα και άρα την κινητική ενέργεια πρέπει να καθορίσουμε ένα σύστημα αναφοράς. Η ταχύτητα ενός επιβάτη που κάθεται μέσα σ' ένα τραίνο είναι μηδέν, αν πάρουμε το τραίνο σα σύστημα αναφοράς, δεν είναι όμως μηδέν για ένα παρατηρητή στο έδαφος, που βλέπει τον επιβάτη να κινείται με ομαλή ταχύτητα. Η τιμή της κινητικής ενέργειας εξαρτάται από το χρησιμοποιούμενο, από τον παρατηρητή, σύστημα αναφοράς. Άρα το σημαντικό για τη μηχανική ενέργεια *E,* που είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας, δεν είναι η πραγματική τιμή της στη διάρκεια μιας δοσμένης κινήσεως (αυτή εξαρτιέται από τον παρατηρητή), αλλά το γεγονός ότι η τιμή αυτή δεν μεταβάλλεται στη διάρκεια της κινήσεως για οποιοδήποτε παρατηρητή όταν οι δυνάμεις είναι συντηρητικές.

Μονοδιάστατα συντηρητικά συστήματα

Ας υπολογίσουμε τώρα τη δυναμική ενέργεια σε δυο μονοδιάστατα παραδείγματα συντηρητικών δυνάμεων, της δυνάμεως βαρύτητας για κινήσεις κοντά στη γήινη επιφάνεια και της ελαστικής δυνάμεως επαναφοράς ενός (ιδανικού) τεντωμένου ελατήριου.

Για τη δύναμη βαρύτητας παίρνουμε τη μονοδιάστατη κίνηση κατακόρυφη, πάνω στον άξονα y. Η θετική κατεύθυνση του άξονα *y* λαβαίνετε προς τα πάνω. Η δύναμη βαρύτητας έχει τότε την αρνητική y κατεύθυνση, δηλαδή προς τα κάτω. Έχουμε ότι *F(y) = —mg,* σταθερά. Η δυναμική ενέργεια στη θέση *y* βρίσκεται άπα την Εξ. 9, ή

$$U(y) = -\int_0^y F(y)dy + U(0) = -\int_0^y (-mg)dy + U(0) = mgy + U(0)$$

Η δυναμική ενέργεια μπορεί να θεωρηθεί μηδέν όταν y = Ο, ώστε U(0) = 0 και

$$U(y) = mgy. \qquad (10)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας είναι λοιπόν *mgy.* Η σχέση *F(y) = -dU/dy* (Εξ. 7) ικανοποιείται, γιατί *-d(mgy)/dy = —mg.* Διαλέγουμε να είναι *y* = Ο στην επιφάνεια της γης για λόγους ευκολίας, ώστε η δυναμική ενέργεια της βαρύτητας να είναι μηδέν στην επιφάνεια της γης και να αυξάνεται γραμμικά με το ύψος y.

Αν συγκρίνουμε τα σημεία y και y = 0, η διατήρηση του αθροίσματος κινητική συν δυναμική ενέργεια (Εξ. 6β) μας δίνει τη σχέση

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Αυτή είναι μαθηματικά ισοδύναμη με τα γνωστό αποτέλεσμα,

$$v^2 = v_0^2 - 2gy$$

Αν το σωμάτιο μας κινηθεί από ένα ύψος h_1 σ’ ένα ύψος h_2, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 6β για να πάρουμε

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

Η ολική μηχανική ενέργεια *Ε* είναι σταθερή και διατηρείται στη διάρκεια της κινήσεως, παρ' όλο που η κινητική και η δυναμική ενέργεια μεταβάλλονται καθώς η κατάσταση του συστήματος (σωμάτιο + γη) μεταβάλλεται.

Ένα δεύτερο παράδειγμα συντηρητικής δυνάμεως είναι εκείνη πού εξασκεί ένα ελατήριο πάνω σε μια μάζα m πού συνδέεται μ' αυτό και κινείται σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Αν πάρουμε $\chi_0 = 0$ για τη θέση του άκρου του ελατήριου στην κανονική κατάστασή του, η δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα, όταν το ελατήριο τεντωθεί κατά *χ,* είναι *F = = - kx.* Η δυναμική ενέργεια βρίσκεται από την Εξ. 9,

$$U(x) = -\int_0^x F(x)dx + U(0) = -\int_0^x (-kx)dx + U(0)$$

Αν πάρουμε U(0)=0, η δυναμική ενέργεια, όπως και η δύναμη, είναι μηδέν όταν το ελατήριο είναι ελεύθερο και

$$U(x) = -\int_0^x (-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2$$

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο είτε τεντώνουμε είτε συμπιέζουμε το ελατήριο, δηλαδή είτε το *χ* είναι θετικό είτε αρνητικό.

Η σχέση $F(x) = -dU/dx$ (Εξ.. 7) ικανοποιείται, γιατί $-d(\frac{1}{2}kx^2)/dx = -kx$. Η ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατήριου λοιπόν είναι

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \qquad (11)$$

Το σώμα μάζας *m* θα εκτελέσει κίνηση στην οποία η ολική ενέργεια *E* διατηρείται. Από την Εξ. 6β έχουμε

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Εδώ v_0 είναι ή ταχύτητα του σωματίου για $χ = 0$. Φυσικά πετυχαίνουμε μια τέτοια κατάσταση τεντώνοντας το ελατήριο κατά ορισμένο μήκος x_m, ε- φαρμόζοντας μια δύναμη και ακολούθως αφήνοντας το ελατήριο. Παρατηρούμε ότι για $χ=0$ η ενέργεια του συστήματος (σώμα + ελατήριο) είναι όλη κινητική. Για $χ = x_m$ (μέγιστη τιμή του *χ*), ή υ πρέπει να είναι μηδέν και έτσι εδώ ή ενέργεια του συστήματος είναι όλη δυναμική. Στο $χ = x_m$, έχουμε:

$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

ή

$$x_m = (m/k)^{1/2}v_0$$

Για θέσεις μεταξύ των x_1, και $χ_2$ η Εξ. 6β δίνει

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Είδαμε ότι ή κινητική ενέργεια ενός σώματος είναι το έργο πού μπορεί να αποδώσει λόγω της κινήσεώς του. Εκφράζουμε την κινητική ενέργεια με τον τύπο $K = mv^2/2$. Δεν μπορούμε να δώσουμε ένα παρόμοιο γενικό τύπο με τον οποίο να εκφράζεται η δυναμική ενέργεια. Η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος σωμάτων είναι το έργο πού μπορεί να αποδώσει το σύστημα των σωμάτων, λόγω της σχετικής θέσεως των μελών του, δηλαδή λόγω της καταστάσεως

τ ο υ . Σε κάθε περίπτωση πρέπει να προσδιορίζουμε πόσο έργο μπορεί να αποδώσει περνώντας από μια κατάσταση σε άλλη και ακολούθως να παίρνουμε αυτό το έργο σαν τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας του συστήματος μεταξύ των δύο αυτών καταστάσεων.

Η δυναμική ενέργεια του ελατήριου εξαρτάται από τη σχετική θέση των τμημάτων του. Έργο παράγεται αν αφήσουμε το ελατήριο να επιστρέψει από την τεντωμένη στην κανονική του κατάσταση, οπότε εξασκεί δύναμη κατά μήκος του δρόμου. Αν στο ελατήριο προσδεθεί μια μάζα, η μάζα επιταχύνεται από τη δύναμη αυτή και η δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια. Στην περίπτωση της βαρύτητας ένα σώμα παίρνει μια θέση σε σχέση προς τη γη. Η δυναμική ενέργεια είναι ένα φυσικό μέγεθος που χαρακτηρίζει το σύστημα του σώματος και της γης. Η σχετική θέση των μελών του συστήματος αυτού είναι εκείνη που καθορίζει τη δυναμική ενέργεια. Η δυναμική ενέργεια είναι μεγαλύτερη όταν τα μέλη είναι απομακρυσμένα παρά όταν βρίσκονται κοντά το ένα στο άλλο. Η απώλεια δυναμικής ενέργειας είναι ίση με το έργο που παράγεται σ' αυτή τη διαδικασία. Το έργο αυτό μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια των σωμάτων. Αρχικά, το σώμα αυτό εξασκεί δύναμη πάνω στη γη και την αναγκάζει να αποκτήσει επιτάχυνση, σε σχέση με κάποιο αδρανειακό σύστημα. Η μεταβολή της ταχύτητας όμως που προκύπτει, είναι εξαιρετικά μικρή και παρ' όλη την τεράστια μάζα της γης, η επιπρόσθετη κινητική της ενέργεια είναι αμελητέα σε σύγκριση με εκείνη του σώματος που πέφτει. Σε άλλες περιπτώσεις, όπως στην κίνηση των πλανητών όπου οι μάζες των σωμάτων στο σύστημα μας είναι συγκρίσιμες, δεν μπορούμε να αγνοήσουμε οποιοδήποτε μέλος του συστήματος. Γενικά, δ υ ν α μ ι κ ή ε ν έ ρ γ ε ι α δεν αποδίνεται σε κάθε σώμα ξεχωριστά αλλά θ ε ω ρ ε ί τ α ι σα μ ι α κ ο ι ν ή ι- δ ι ό τ η τ α τ ο υ σ υ σ τ ή μ α τ ο ς .

Διδιάστατα και τρισδιάστατα συντηρητικά συστήματα

Μέχρι τώρα συζητήσαμε για τη δυναμική ενέργεια και τη διατήρηση της ενέργειας σε μονοδιάστατα συστήματα, στα οποία η δύναμη είχε τη διεύθυνση της κίνησης. Μπορούμε εύκολα να γενικεύσουμε τη συζήτηση μας για τρισδιάστατη κίνηση.

Αν το έργο πού παράγει η δύναμη F εξαρτάται μόνο από τα ακραία σημεία της κινήσεως και είναι ανεξάρτητο του ακολουθούμενου μεταξύ των σημείων αυτών δρόμου, η δύναμη είναι συντηρητική. Ορίζουμε τη δυναμική ενέργεια *U* σε αναλογία με το μονοδιάστατο σύστημα και βρίσκουμε ότι είναι μια συνάρτηση

των τριών συντεταγμένων χώρου, δηλαδή *U = U(x,y,z).* Παίρνουμε και πάλι μια έκφραση για τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

Η γενίκευση της Εξ. 5β για τρισδιάστατη κίνηση είναι

$$\Delta U = -\int_{x_0}^{x} F_X\,dx - \int_{y_0}^{y} F_y\,dy - \int_{z_0}^{z} F_z\,dz \qquad \textbf{(5γ)}$$

ή πιο σύντομα με διανυσματική μορφή

$$\Delta U = -\int_L \vec{F}(r)\cdot \vec{dr} \qquad \textbf{(5δ)}$$

όπου ΔU είναι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος καθώς το σωμάτιο κινείται από το σημείο (χ_0,y_0,z_o), που περιγράφεται από το διάνυσμα θέσεως r_O, στο σημείο *(x,y,z),* πού περιγράφεται από το διάνυσμα θέσεως r. F_x, F_y και F_z είναι οι συνιστώσες της συντηρητικής δυνάμεως *F(r) = F(x,y,z).* Η γενίκευση της Εξ. 6β για τρισδιάστατη κίνηση είναι

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x,y,z) = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0,y_o,z_o) \quad \textbf{(6γ)}$$

η οποία σε διανυσματική μορφή μπορεί να γραφτεί

$$\frac{1}{2}mv \bullet v + U(r) = \frac{1}{2}mv_0 \bullet v_0 + U(r_0) \quad \textbf{(6δ)}$$

όπου $v\cdot v = v_\chi^2 + v_y^2 + v_Z^2 = v^2$ και $v_0\cdot v_0 = v_{o\chi}^2 + v_{oy}^2 + v_{OZ}^2 = v_0^2$.

Ομοίως η Εξ. 6α γίνεται

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x,y,z) = E$$

στις τρεις διαστάσεις, όπου Ε είναι η σταθερή ολική μηχανική ενέργεια. Τέλος, η γενίκευση της Εξ. 7 στις τρεις διαστάσεις είναι

$$F(r) = -i\frac{\partial U}{\partial X} - j\frac{\partial U}{\partial y} - k\frac{\partial U}{\partial Z}$$

Αν αντικαταστήσουμε την έκφραση αυτή της F στην Εξ. 5δ παίρνουμε και πάλι ταυτότητα.

Μη συντηρητικές δυνάμεις

Μέχρι τώρα μελετήσαμε μόνο τη δράση μιας συντηρητικής δύναμης πάνω σ' ένα σωμάτιο. Ξεκινώντας από το θεώρημα έργου - ενέργειας

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_n = \Delta K$$

είδαμε ότι, αν μόνο μια δύναμη, έστω η F_1 εξασκιόταν και αν ήταν συντηρητική, τότε θα μπορούσαμε να παραστήσουμε το έργο W_1 πού παράχθηκε πάνω στο σωμάτιο σα μια μείωση της δυναμικής ενέργειας ΔU_1 του συστήματος (βλέπε Εξ.5α), ή

$$W_1 = -\Delta U_1$$

Συνδυάζοντας αυτό με την Εξ.2 πήραμε

$$\Delta K + \Delta U_1 = 0.$$

Αν εξασκούνται πολλές συντηρητικές δυνάμεις όπως δύναμη βαρύτητας, ελαστική δύναμη ελατηρίου, ηλεκτροστατική δύναμη, κ.λ.π., μπορούμε εύκολα να επεκτείνουμε τις δύο αυτές εξισώσεις στις

$$\Sigma W_c = -\Sigma \Delta U \qquad (14\alpha)$$

και

$$\Delta K + \Sigma \Delta U = 0 \qquad (14\beta)$$

όπου ΣW_c είναι το άθροισμα των έργων που παράγουν οι διάφορες (συντηρητικές) δυνάμεις και ΔU είναι οι μεταβολές της δυναμικής ενέργειας του συστήματος, που σχετίζεται με τις δυνάμεις αυτές. Η ποσότητα στα αριστερά της Εξ. 14β είναι απλώς η μεταβολή της ολικής μηχανικής ενέργειας ΔΕ, για την περίπτωση που πολλές συντηρητικές δυνάμεις δρουν πάνω σ' ένα σωμάτιο. Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση αυτή σαν

$$\Delta E = 0 \quad \text{(συντηρητικές δυνάμεις)} \qquad (15)$$

που μας λέει, ότι καθώς ο σχηματισμός του συστήματος μεταβάλλεται, η ολική μηχανική ενέργεια *E* του συστήματος παραμένει σταθερή.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, επιπρόσθετα με τις πολλές συντηρητικές δυνάμεις, πάνω στο σωμάτιο εξασκείται και μια μη συντηρητική δύναμη τριβής. Τότε μπορούμε να γράψουμε την Εξ. 2 σαν

$$W_f + \Sigma W_c = \Delta K$$

όπου ΣW_c είναι και πάλι το άθροισμα των έργων που παράγουν οι συντηρητικές δυνάμεις και W_f *το* έργο που παράγει η τριβή. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την τελευταία (βλέπε Εξ. 14β) σαν

$$\Delta K + \Sigma \Delta U = W_f \qquad (16)$$

Η Εξ. 16 δείχνει ότι αν δρα μια δύναμη τριβής, η ολική μηχανική ενέργεια δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται κατά το ποσό του έργου, που παράγει η δύναμη τριβής. Μπορούμε να γράψουμε την Εξ. 16 σαν

$$\Delta E = E - E_0 = W_f \qquad (17)$$

Αφού το έργο W_f, πού παράγει η δύναμη τριβής π ά ν ω στο σωμάτιο, είναι πάντα αρνητικό, βγαίνει από την Εξ. 17 ότι η τελική μηχανική ενέργεια *E* (= *K* + Σ*U*), είναι μικρότερη από την αρχική μηχανική ενέργεια E_0 (= K_0 + ΣU_0).

Η τριβή είναι ένα παράδειγμα μιας δύναμης που παράγει αρνητικό έργο πάνω στο σώμα και τείνει να μειώσει την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος. Αν χρησιμοποιούσαμε μια άλλη μη συντηρητική δύναμη, τότε το W_f *στις* Εξ. 16 και 17 θα αντικατασταινόταν από τον όρο W_{nc}, που δείχνει και πάλι ότι η ολική μηχανική ενέργεια *E* του συστήματος δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται κατά το ποσό του έργου που παράγει η μη συντηρητική δύναμη. Άρα, *μ ό ν ο ό τ α ν δ ε ν υ π ά ρ χ ο υ ν μη σ υ ν τ η ρ η τ ι κ έ ς δ υ ν ά μ ε ι ς, ή ό τ α ν μ π ο ρ ο ύ μ ε να α γ ν ο ή σ ο υ μ ε το έ ρ γ ο π ο ύ π α ρ ά γ ο υ ν, μ π ο ρ ο ύ μ ε να υ π ο θ έ σ ο υ μ ε τη δ ι α τ ή ρ η σ η τ η ς μ η χ α ν ι κ ή ς ε ν έ ρ γ ε ι α ς.*

Τι έγινε με τη "χαμένη" μηχανική ενέργεια στην περίπτωση της τριβής; Μετασχηματίζεται σε εσωτερική ενέργεια $U_{εσ}$, προκαλώντας π.χ. την αύξηση της θερμοκρασίας. Η εσωτερική ενέργεια που παράχθηκε, είναι ακριβώς ίση με τη μηχανική ενέργεια που δαπανήθηκε.

Ακριβώς, όπως το έργο που παράγει μια συντηρητική δύναμη π ά ν ω σ' ένα σώμα, είναι το αντίθετο της αυξήσεως της δυναμικής ενέργειας, έτσι και το έργο που παράγει ή τριβή πάνω σ' ένα σώμα είναι το αντίθετο της αυξήσεως της εσωτερικής ενέργειας. Με άλλα λόγια η παραγόμενη εσωτερική ενέργεια ισούται με το έργο που παράγεται α π ό το σώμα. Τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε το W_f στην Εξ. 17 με το $-U_{εσt}$, όπου $U_{εσt}$ είναι η παραγόμενη εσωτερική ενέργεια, ή

$$\Delta E + U_{εσ} = 0 \qquad (18)$$

Η τελευταία λέει ότι δεν υπάρχει μεταβολή στο άθροισμα της μηχανικής και εσωτερικής ενέργειας του συστήματος όταν πάνω στο σύστημα εξασκούνται μόνο συντηρητικές και δυνάμεις τριβής. Γράφοντας την εξίσωση αυτή σαν $U_{εσ}=-\Delta E$ βλέπουμε ότι η απώλεια μηχανικής ενέργειας ισούται με την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας.

Η διατήρηση της ενέργειας

Μπορούμε να επεκτείνουμε τη συζήτηση της προηγουμένης παραγράφου, θεωρώντας όχι μόνο συντηρητικές δυνάμεις και δυνάμεις τριβής, αλλά επίσης και άλλες, μη συντηρητικές δυνάμεις και εκτός της τριβής. Μπορούμε να ξαναγράψουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_n = \Delta E$$

σαν

$$\Sigma W_c + W_f + \Sigma W_{nc} = \Delta K \qquad (19)$$

όπου ΣW_c είναι το ολικό έργο που παράγουν πάνω στο σωμάτιο οι συντηρητικές δυνάμεις, W_f *το* έργο που παράγει η τριβή και ΣW_{nc} το ολικό έργο που παράγουν οι άλλες μη συντηρητικές δυνάμεις εκτός της τριβής. Έχουμε δει ότι κάθε συντηρητική δύναμη, μπορεί να συνδεθεί με μια δυναμική ενέργεια και ότι ή τριβή σχετίζεται με την εσωτερική ενέργεια, ή

$$\Sigma W_C = -\Sigma \, \Delta U$$

και

$$W_f = -U_{\varepsilon\sigma}$$

οπότε η Εξ. 19 γίνεται

$$\Sigma W_{nc} = \Delta K + \Sigma \Delta U + U_{\varepsilon\sigma}$$

Τώρα όποια κι αν είναι τα W_{nc}, είναι πάντοτε δυνατό να βρίσκουμε νέες μορφές ενέργειας που αντιστοιχούν σ' αυτό το ολικό έργο. Μπορούμε τότε να παραστήσουμε το ΣW_{nc} με ένα άλλο όρο μεταβολής ενέργειας στο δεξιό μέρος της εξισώσεως, με αποτέλεσμα να μπορούμε πάντοτε να γράψουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας σαν

$$0 = \Delta K + \Sigma \, \Delta U + U_{\varepsilon\sigma} + (\text{μεταβολή άλλων μορφών ενέργειας})$$

Με άλλα λόγια, η ολική ενέργεια - κινητική συν δυναμική συν εσωτερική συν όλες οι άλλες μορφές — δεν μεταβάλλεται. *Η ενέργεια μπορεί να μετασχηματίζεται από μια μορφή σε άλλη, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η ολική ενέργεια είναι σταθερή.*

Η πρόταση αυτή είναι μια γενίκευση της εμπειρίας μας, που μέχρι τώρα δεν διαψεύστηκε από φυσικές παρατηρήσεις. Λέγεται αρχή διατηρήσεως της ενέργειας. Πολλές φορές στην ιστορία της φυσικής, η αρχή αυτή φαινόταν να αποτυχαίνει. Η φαινομενική όμως αποτυχία της, ωθούσε την έρευνα για τα αίτια. Οι πειραματιστές αναζητούσαν φυσικά φαινόμενα, εκτός από την κίνηση, που συσχετίζονται με τις δυνάμεις αλληλεπιδράσεως μεταξύ σωμάτων. Τέτοια φαινόμενα βρίσκονται πάντοτε. Με το έργο που προσφέρεται για την υπερνίκηση της τριβής παράγεται εσωτερική ενέργεια. Σε άλλες αλληλεπιδράσεις μπορεί να παραχθεί ενέργεια με μορφή ήχου, φωτός, ηλεκτρισμού, κ.λ.π. Η έννοια λοιπόν της ενέργειας γενικεύτηκε για να περιλάβει μορφές εκτός από την κινητική και τη δυναμική ενέργεια των άμεσα

παρατηρήσιμων σωμάτων. Η διαδικασία αυτή που συνδέει τη μηχανική των κινουμένων σωμάτων με φαινόμενα που δεν είναι μηχανικά ή στα οποία δεν παρατηρείται άμεσα κίνηση, συνδέει τη μηχανική με άλλες περιοχές της φυσικής. Η έννοια της ενέργειας απλώνεται τώρα σε όλη τη φυσική επιστήμη και έχει γίνει μια από τις ενοποιητικές έννοιες της φυσικής.

Παρ' όλο που η αρχή διατηρήσεως του αθροίσματος της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας είναι συχνά χρήσιμη, βλέπουμε πως είναι μια ειδική περίπτωση μιας γενικότερης αρχής διατηρήσεως της ενέργειας. Το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας διατηρείται μόνο όταν δρουν συντηρητικές δυνάμεις. Η ολική ενέργεια διατηρείται π ά ν τ ο τ ε .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η ανάπτυξη των θεμάτων από τους επιμορφούμενους πραγματοποιήθηκε ως εξής:

1. **Τα πειράματα 1^o , 2^o , 9^o και η αναλυτική θεωρία από τον Γεώργιο Φιτσιάλη**
2. **Τα πειράματα 3^o , 4^o , 5^o και η αναλυτική θεωρία από τον Παρασκευά Καλαϊτζάκη**
3. **Τα πειράματα 6^o , 7^o, 8^o και η αναλυτική θεωρία από Βαλάση Καμαρινό**

Η εκτέλεση των πειραμάτων πραγματοποιήθηκε σε συνεργασία και από τους τρεις επιμορφούμενους.

Η μορφοποίηση του κειμένου πραγματοποιήθηκε από τον Γεώργιο Φιτσιάλη.

Η επεξεργασία των μετρήσεων και οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν από τον **Παρασκευά Καλαϊτζάκη**

Ο έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τον **Βαλάση Καμαρινό**

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε για την βοήθεια και τις παρατηρήσεις τους:

Χρήστο Τρικαλινό **Αν. καθηγητή φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών**

Ανδρέα Καραμπαρμπούνη Επ. **καθηγητή φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών**

Τους συναδέλφους του εργαστηρίου φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών

Στέλιο Νουνό και Δημήτρη Κιούση.

Την συνάδελφο Λαμπρινή Παπατσίμπα υπεύθυνη των διπλωματικών εργασιών των επιμορφουμένων.

Τον συνάδελφο Κωνσταντίνο Καμπούρη υπεύθυνο του Ε.Κ.Φ.Ε. Χαλανδρίου.

Επίσης ευχαριστούμε τους υπεύθυνους του επιμορφωτικού προγράμματος και όλους τους επιμορφωτές.