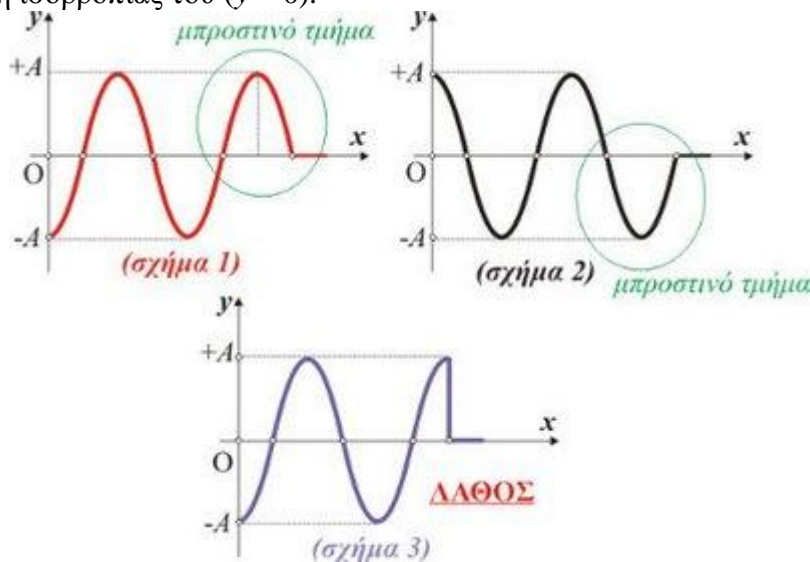


Αρχική Φάση και τρέχον κύμα...

Με ερέθισμα τη συζήτηση που έχει αναπτυχθεί στο ιστολόγιο του εκλεκτού συναδέλφου [Διονύση Μάργαρη](#) ας ξεκινήσουμε να ξεκαθαρίσουμε λίγο τα πράγματα για το τι συμβαίνει με την αρχική φάση π rad (και γενικότερα με την αρχική φάση στο κύμα).

Η βασική αρχή που πρέπει όλοι να κατανοούμε όταν συζητάμε για την αρχική φάση στο κύμα, είναι ότι όλα τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου ηρεμούν στη θέση ισορροπίας τους ($y = 0$) πριν φτάσει σε αυτά το κύμα και όταν τελικά φτάσει το κύμα σε κάποιο υλικό σημείο, τότε το σημείο αυτό είτε θα κινηθεί προς τα πάνω με $+v_{\max}$ (η συντριπτική πλειοψηφία των κυμάτων που μελετάμε), είτε θα κινηθεί προς τα κάτω με $-v_{\max}$.

Αν τα υλικά σημεία ξεκινούν να κινούνται προς τα πάνω όταν φτάνει σε αυτά το κύμα, τότε το προστινικό μέρος του στιγμιότυπου **θα έχει τη μορφή όρους** (σχήμα 1), ενώ όταν τα υλικά σημεία ξεκινούν να κινούνται προς τα κάτω, τότε το προστινικό μέρος του στιγμιότυπου **θα έχει τη μορφή κοιλάδας** (σχήμα 2). Με βάση τα παραπάνω δεν είναι δυνατόν ποτέ το στιγμιότυπο ενός κύματος να είναι **στιγμιότυπο "κόμπρα"** (σχήμα 3), αφού κάθε υλικό σημείο όταν ξεκινά να ταλαντώνεται, ξεκινά από τη θέση ισορροπίας του ($y = 0$).



Τι σημαίνει όμως αρχική φάση για ένα κύμα;

(ανανεωμένο για πιο γενική αντιμετώπιση)

Πρέπει να ξεχωρίσουμε την αρχική φάση ενός υλικού σημείου του ελαστικού μέσου από την αρχική φάση του κύματος. Η αρχική φάση του κύματος εμφανίζεται στην εξίσωση του κύματος ως ένας πρόσθετος όρος και άλλοτε έχει θετικό πρόσημο, ενώ άλλοτε έχει αρνητικό πρόσημο (το νόημα του θετικού και αρνητικού προσήμου φαίνεται στην επόμενη ανάλυση). **Η αρχική φάση του κύματος αναφέρεται στο τι συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 0$ με το κύμα, ως προς το αν έχει φτάσει ή όχι στο σημείο $O(x = 0)$, ανεξάρτητα από το αν το κύμα εξαναγκάζει τα υλικά να κινούνται προς τα πάνω ή προς τα κάτω όταν ξεκινάνε.** (εξαιρέση αποτελεί η αρχική φάση π rad που μπορεί να έχει διπλό νόημα). Το σημείο $O(x = 0)$ είναι από τη φύση του ένα προνομιακό σημείο μιας και ορίζει την αρχή του άξονα που χρησιμοποιούμε. Χωρίς αυτό δεν θα μπορούσαμε να γράψουμε εξίσωση κύματος.

Στην επόμενη εξίσωση φαίνεται η γενική μορφή της εξίσωσης ενός κύματος που έχει αρχική φάση (το 2π rad το έχω βάλει "μέσα" στην εξίσωση για να δείξω την αρχική φάση του κύματος).

$$y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} \pm \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_{\sigma, \kappa\upsilon\mu}\right)$$

Για την εύρεση της αρχικής φάσης του κύματος πρέπει να γνωρίζουμε τη χρονική εξίσωση ταλάντωσης ενός υλικού σημείου του ελαστικού μέσου (όχι απαραίτητα του $O(x = 0)$). Αυτή η εξίσωση θα θεωρείται από εμάς ως **εξίσωση αναφοράς**. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε **ως εξίσωση αναφοράς την εξίσωση ταλάντωσης του υλικού σημείου που τη χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινά να ταλαντώνεται**. Αν το σημείο αυτό (πχ Z) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ με φορά προς τα πάνω, τότε η εξίσωση ταλάντωσής του είναι $y_Z = A\eta\mu\omega t$, ενώ αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινά να ταλαντώνεται με φορά προς τα κάτω, τότε η εξίσωση ταλάντωσής του είναι η $y_Z = A\eta\mu(\omega t + \pi)$. Να σημειώσουμε ότι δε μας ενδιαφέρει που βρίσκεται η πηγή του κύματος.

Πως ξεχωρίζουμε αν ένα κύμα έχει αρχική φάση;

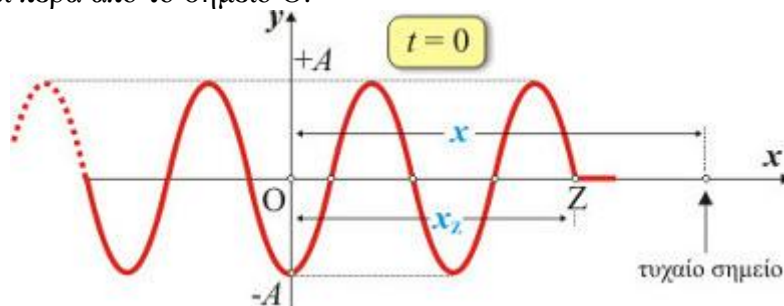
Αρχική φάση θα έχει ένα κύμα αν **τη χρονική στιγμή $t = 0$** :

- Το κύμα έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο $O(x = 0)$. (1η περίπτωση)
- Το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμα στο σημείο $O(x = 0)$. (2η περίπτωση)
- Το κύμα μόλις έχει φτάσει στο σημείο $O(x = 0)$ (οπότε δεν έχει περάσει πέρα από αυτό) αλλά εξαναγκάζει το υλικό σημείο $O(x = 0)$ να κινηθεί προς τα κάτω. (3η περίπτωση)

Ας δούμε τις παραπάνω περιπτώσεις ξεχωριστά:

1η περίπτωση: Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο $O(x = 0)$.

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο ενός κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά, τη χρονική στιγμή $t = 0$. Είναι φανερό ότι το κύμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει ήδη διαδοθεί πέρα από το σημείο O .



Αφού το σημείο Z ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ με φορά προς τα πάνω, η εξίσωση ταλάντωσής του είναι η $y_Z = A\eta\mu\omega t$. Αυτή την εξίσωση θα χρησιμοποιήσω ως εξίσωση αναφοράς. Έτσι για το τυχαίο σημείο του ελαστικού

μέσου που βρίσκεται στη θέση x του άξονα θα ισχύει η εξίσωση ταλάντωσης $y = A\eta\mu[(\omega t) - \Delta\phi]$, όπου $\Delta\phi$ η διαφορά φάσης του τυχαίου σημείου που βρίσκεται στη θέση x του άξονα και του σημείου Z .

Το (-) το βάζω διότι το σημείο Z ξεκίνησε να ταλαντώνεται πριν από το τυχαίο σημείο, οπότε η φάση του τυχαίου σημείου θα είναι μικρότερη από τη φάση του σημείου Z (ωt).

Το $\Delta\phi$ το υπολογίζω με το γνωστό τρόπο: $\Delta\phi = \omega\Delta t$ ($\Delta t =$ χρονική διάρκεια που χρειάζεται το κύμα για να πάει από το ένα σημείο στο άλλο).

Είναι $\Delta\phi = \omega\Delta t = (2\pi/T)(x-x_Z)/v \implies \Delta\phi = 2\pi(x-x_Z)/\lambda$.

Συνεπώς η εξίσωση ταλάντωσης του τυχαίου σημείου (εξίσωση του κύματος) γίνεται:

$$y = A\eta\mu\left(\omega t - \frac{2\pi(x-x_Z)}{\lambda}\right) \Leftrightarrow y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{2\pi x_Z}{\lambda}\right)$$

Ο όρος $+ 2\pi x_Z/\lambda$ είναι η αρχική φάση του κύματος και είναι θετικός αφού δείχνει ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο $O(x=0)$. Στην ίδια σχέση θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε ως εξίσωση αναφοράς την εξίσωση ταλάντωσης οποιουδήποτε σημείου του ελαστικού μέσου (που έχει ήδη ξεκινήσει την $t = 0$ να ταλαντώνεται).

Ας δοκιμάσουμε να χρησιμοποιήσουμε ως εξίσωση αναφοράς την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου $O(x = 0)$. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι η εξίσωση ταλάντωσης του υλικού σημείου $O(x = 0)$ είναι $y_0 = A\eta\mu(\omega t + 7\pi/2)$.

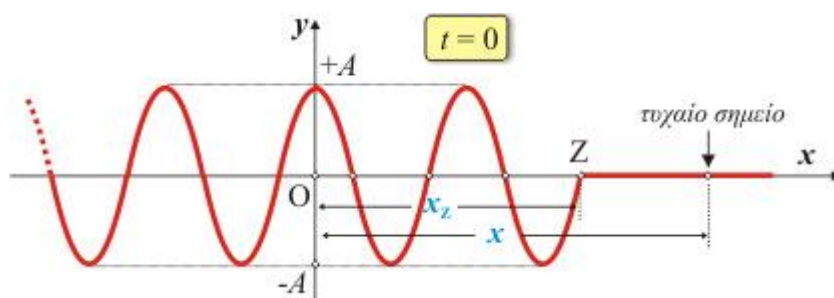
Για το τυχαίο σημείο x είναι

$$y = A\eta\mu(\omega t + 7\pi/2 - \Delta\phi) = A\eta\mu(\omega t + 7\pi/2 - 2\pi x/\lambda) \implies$$

$$y = A\eta\mu(\omega t - 2\pi x/\lambda + 7\pi/2).$$

Αν στον τύπο που προέκυψε από την ανάλυση με εξίσωση αναφοράς το σημείο Z , βάλετε όπου $x_Z = 3\lambda/2 + \lambda/4$ θα προκύψει το ίδιο αποτέλεσμα.

Ας δούμε και την περίπτωση, το κύμα να διαδίδεται προς τα δεξιά και τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου να ξεκινούν να ταλαντώνονται με φορά προς τα κάτω. Το αντίστοιχο στιγμιότυπο θα είναι αυτό που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Αν θέλαμε να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία εύρεσης της αρχικής φάσης θεωρώντας και πάλι ως εξίσωση αναφοράς την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Z , θα γράφαμε: $y_Z = A\eta\mu(\omega t + \pi)$ και για το τυχαίο σημείο που βρίσκεται στη θέση x του άξονα:

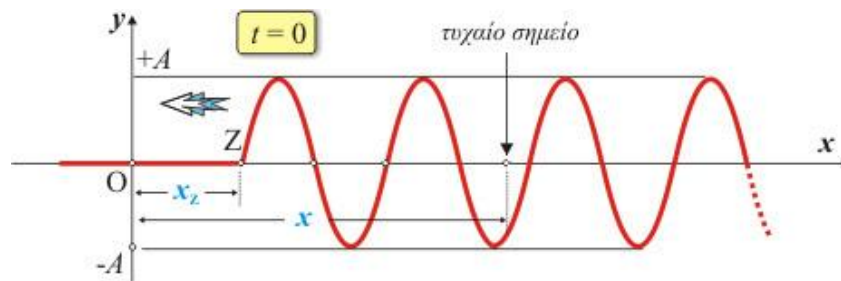
$y = A\eta\mu[(\omega t + \pi) - \Delta\phi]$. Με τη βοήθεια του τύπου $\Delta\phi = 2\pi(x-x_Z)/\lambda$ θα καταλήγαμε στην εξίσωση του κύματος:

$$y = A\eta\mu\left[\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \left(\frac{2\pi x_z}{\lambda} + \pi\right)\right]$$

Η αρχική φάση του κύματος είναι τώρα ο όρος $+(2\pi x_z/\lambda + \pi)$ και πάλι θετικός αφού τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο $O(x = 0)$.

2η περίπτωση: Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο $O(x = 0)$.

Η εξίσωση αναφοράς θα είναι πάντοτε η εξίσωση ταλάντωσης ενός σημείου του μέσου που έχει ξεκινήσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$. Συνήθως μας βολεύει να χρησιμοποιούμε ως εξίσωση αναφοράς την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου που ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο ενός κύματος που διαδίδεται προς τ' αριστερά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Το κύμα αυτό είναι φανερό ότι δεν έχει φτάσει στο σημείο $O(x = 0)$ τη στιγμή $t = 0$.



Χρησιμοποιώ ως εξίσωση αναφοράς την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Z το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινά να ταλαντώνεται. Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου αυτού είναι $y_z = A\eta\mu\omega t$. Για το τυχαίο σημείο x που έχω σημειώσει στο στιγμιότυπο, θα ισχύει $y = A\eta\mu[\omega t + \Delta\phi]$, όπου $\Delta\phi$ η διαφορά φάσης του τυχαίου σημείου που βρίσκεται στη θέση x του άξονα και του σημείου Z . Το (+) το βάζω διότι το σημείο Z ξεκίνησε να ταλαντώνεται μετά από το τυχαίο σημείο, οπότε η φάση του τυχαίου σημείου θα είναι μεγαλύτερη από τη φάση του σημείου Z (ωt). Το $\Delta\phi$ το υπολογίζω με το γνωστό τρόπο:

$\Delta\phi = \omega\Delta t$ (Δt = χρονική διάρκεια που χρειάζεται το κύμα για να πάει από το ένα σημείο στο άλλο). Είναι $\Delta\phi = \omega\Delta t = (2\pi/T)(x-x_z)/v \implies \Delta\phi = 2\pi(x-x_z)/\lambda$. Συνεπώς η εξίσωση ταλάντωσης του τυχαίου σημείου (εξίσωση του κύματος) γίνεται:

$$y = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi(x-x_z)}{\lambda}\right) \Leftrightarrow y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi x_z}{\lambda}\right)$$

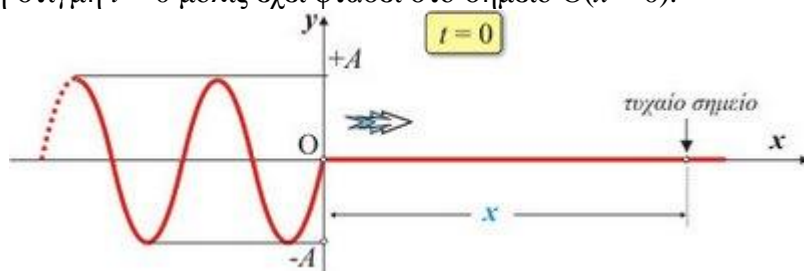
Ο όρος $-2\pi x_z/\lambda$ είναι η αρχική φάση του κύματος και είναι αρνητικός που μας δείχνει ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο $O(x=0)$.

Παρατηρήστε ότι για κύμα που διαδίδεται προς τ' αριστερά το (+) μπροστά στον όρο $2\pi x/\lambda$ εμφανίζεται πάντοτε. Για κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά το (-) εμφανίζεται επίσης μπροστά στον όρο $2\pi x/\lambda$.

3η περίπτωση: Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα μόλις έχει φτάσει στο σημείο $O(x = 0)$ και το εξαναγκάζει να κινηθεί με φορά προς τα κάτω. Η ίδια ανάλυση γίνεται και

στην περίπτωση που η πηγή του κύματος είναι το σημείο $O(x = 0)$ και ξεκινά να κινείται προς τα κάτω δημιουργώντας κύμα στο ελαστικό μέσο.

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο ενός κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά και τη στιγμή $t = 0$ μόλις έχει φτάσει στο σημείο $O(x = 0)$.



Αφού το σημείο $O(x = 0)$ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, η εξίσωση ταλάντωσής του προσφέρεται για εξίσωση αναφοράς. Αφού το υλικό σημείο $O(x = 0)$ ξεκινά τη στιγμή $t = 0$ να κινείται προς τα κάτω, η εξίσωση ταλάντωσής του είναι η $y_0 = A\eta\mu(\omega t + \pi)$.

Για το τυχαίο σημείο x που έχω σημειώσει στο στιγμιότυπο, θα ισχύει $y = A\eta\mu[(\omega t + \pi) - \Delta\phi]$, όπου $\Delta\phi$ η διαφορά φάσης του τυχαίου σημείου που βρίσκεται στη θέση x του άξονα και του σημείου O . Το $(-)$ το βάζω διότι το σημείο O ξεκίνησε να ταλαντώνεται πριν από το τυχαίο σημείο, οπότε η φάση του τυχαίου σημείου θα είναι μικρότερη από τη φάση του σημείου O ($\omega t + \pi$). Το $\Delta\phi$ το υπολογίζω με το γνωστό τρόπο:

$\Delta\phi = \omega\Delta t$ ($\Delta t =$ χρονική διάρκεια που χρειάζεται το κύμα για να πάει από το ένα σημείο στο άλλο). Είναι $\Delta\phi = \omega\Delta t = (2\pi/T)(x - x_0)/v$ (Όμως $x_0 = 0$) \implies

$\Delta\phi = 2\pi x/\lambda$. Συνεπώς η εξίσωση ταλάντωσης του τυχαίου σημείου (εξίσωση του κύματος) γίνεται:

$$y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi\right)$$

As συνοψίσουμε όλα τα παραπάνω

1) Για να βρούμε τη αρχική φάση ενός κύματος μπορούμε να επιλέξουμε μία εξίσωση αναφοράς (συνήθως επιλέγουμε την εξίσωση ταλάντωσης που τη χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινά να ταλαντώνεται) και στη συνέχεια με τη βοήθεια της διαφοράς φάσης να βρούμε την εξίσωση ταλάντωσης ενός τυχαίου σημείου x . Αυτή θα είναι και η εξίσωση του κύματος.

Αν μας δίνουν την εξίσωση ταλάντωσης ενός συγκεκριμένου υλικού σημείου του ελαστικού μέσου (ή προκύπτει από τα συμφραζόμενα) χρησιμοποιούμε αυτή ως εξίσωση αναφοράς.

2) Για να βρούμε πόσο μακριά έχει φτάσει το κύμα από το σημείο $O(x = 0)$:

α) Μηδενίζουμε τη φάση αν τα υλικά σημεία ξεκινούν να κινούνται από τη θέση ισορροπίας του με φορά προς τα πάνω.

β) Θέτουμε τη φάση ίση με π rad αν τα υλικά σημεία ξεκινούν να κινούνται από τη θέση ισορροπίας του με φορά προς τα κάτω.

3) Το στιγμιότυπο έχει στο μπροστινό του τμήμα:

α) Όρος, εφόσον το υλικό σημείο O ξεκινά να κινείται με φορά προς τα πάνω (σχήμα 1).

β) Κοιλιάδα, εφόσον το υλικό σημείο O ξεκινά να κινείται με φορά προς τα κάτω (σχήμα 2).

*Παρατήρηση : Η παραπάνω ανάλυση δεν θα ήταν σωστό να αναφερθεί στους μαθητές μας στην πρώτη επαφή τους με το κύμα. Θεωρώ πολύ σημαντικό να μάθουν καλά την έννοια του κύματος όπως τη θεωρεί το σχολικό βιβλίο (δηλαδή το υλικό σημείο O να ξεκινά να κινείται με φορά προς τα πάνω τη χρονική στιγμή $t = 0 \implies$ **Κύμα χωρίς αρχική φάση**) και αφού κατανοήσουν καλά την έννοια αυτή να περάσουμε και στην περίπτωση το υλικό σημείο O ξεκινά την κίνησή προς τα κάτω ή δεν ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0 \implies$ **Κύμα με αρχική φάση**. Συζήτηση μπορεί να γίνει στην τάξη φτιάχνοντας ένα στιγμιότυπο με το μπροστινό του τμήμα κοιλάδα και να ζητήσουμε να ερμηνεύσουν την περίπτωση αυτή.*

Υ.Γ. Για μία πολύ καλή μελέτη της αρχικής φάσης του κύματος (που για την εύρεσή της χρησιμοποιείται η χρονική διαφορά έναρξης της ταλάντωσης) μπορείτε να δείτε τη δημοσίευση [αυτή](#).