

ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

1. Η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος, το οποίο διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, που έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, είναι:

$$y=0,04\eta\mu\pi(200t - 8x) \quad (\text{τα } x \text{ και } y \text{ είναι σε m και το } t \text{ σε s}).$$

Να υπολογίσετε:

- Τη συχνότητα και το μήκος κύματος του κύματος.
- Την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- Τη διαφορά φάσης μεταξύ δυο σημείων του ελαστικού μέσου, τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\Delta x=0,5\text{m}$.
- Τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου.

$$[\mathbf{A\pi.}: \text{a) } f=100 \text{ Hz, } \lambda=0,25 \text{ m } \beta) u=25 \text{ m/s } \gamma) \Delta\varphi=4\pi \text{ rad } \delta) u_{\max}=8\pi \text{ m/s}]$$

2. Η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος, το οποίο διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο κατά μήκος του άξονα $x'x$, είναι:

$$y=0,1\eta\mu 2\pi(2t - \frac{x}{4}) \quad (\text{τα } x \text{ και } y \text{ είναι σε m και το } t \text{ σε s})$$

- Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- Πόσο απέχουν δύο σημεία Α και Β του ελαστικού μέσου που βρίσκονται πάνω στον άξονα και την ίδια χρονική στιγμή οι ταλαντώσεις τους παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi=\frac{7\pi}{2} \text{ rad}$.
- Πόση είναι η μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Α σε χρονικό διάστημα $\Delta t=2,5 \text{ s}$;
- Αν το σημείο Α βρίσκεται στη θέση $x_A=5 \text{ m}$, ποια σημεία του άξονα ανάμεσα στα σημεία Α και Β βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους τη χρονική στιγμή $t=2 \text{ s}$;

Να θεωρήσετε ότι το σημείο Α βρίσκεται πλησιέστερα προς την πηγή Ο του κύματος από το σημείο Β.

$$[\mathbf{A\pi.}: \text{a) } u=8 \text{ m/s, } \beta) \Delta x=7 \text{ m } \gamma) \Delta\varphi=10\pi \text{ rad } \delta) x_1=6 \text{ m, } x_2=8 \text{ m, } x_3=10 \text{ m}]$$

3. Σε ένα σημείο Π ελαστικού μέσου βρίσκεται πηγή, η οποία τη χρονική στιγμή $t=0$ αρχίζει να παράγει αρμονικά εγκάρσια κύματα συχνότητας $f=10 \text{ Hz}$. Σε ένα στιγμιότυπο του κύματος, η απόσταση ενός "όρους" από τη μεθεπόμενη "κοιλιά" είναι $L=90 \text{ cm}$. Να υπολογιστούν:

- Το μήκος κύματος και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- Η απόσταση από την πηγή Π, στην οποία θα έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή $t=10 \text{ s}$, καθώς και ο αριθμός των κυματικών εικόνων που θα έχουν δημιουργηθεί.
- Η συχνότητα και το μήκος κύματος του κύματος, αν κατά τη διάδοση του συναντήσει ένα δεύτερο διαφορετικό ελαστικό μέσο όπου η ταχύτητα διάδοσης του είναι $u'=5 \text{ m/s}$.

$$[\mathbf{A\pi.}: \text{a) } \lambda=0,6\text{m, } u=6 \text{ m/s, } \beta) x=60 \text{ m, } k=100, \gamma) f=10 \text{ Hz, } \lambda'=0,5 \text{ m}]$$

4. Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου με ταχύτητα $u=40 \text{ m/s}$, προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$, ο οποίος ταυτίζεται με το γραμμικό μέσο. Κάποια χρονική στιγμή t οι φάσεις των ταλαντώσεων δύο σημείων Α και Β του μέσου είναι $\varphi_A=15\pi \text{ rad}$ και $\varphi_B=45\pi \text{ rad}$, αντίστοιχα. Το σημείο Β βρίσκεται σε απόσταση $d=5 \text{ m}$ από τη θέση $x=0$ όπου βρίσκεται η πηγή Ο του κύματος και είναι το τρίτο κατά σειρά σημείο του ελαστικού μέσου που έχει μόνιμα αντίθετη απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα από την πηγή Ο.

- Να εξετάσετε, αν το κύμα διαδίδεται από το σημείο Α προς το σημείο Β ή αντίστροφα.
- Να υπολογίσετε τη συχνότητα του κύματος.
- Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων Α και Β.
- Όταν το σημείο Β διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο κατά τη θετική φορά, ποια είναι η απομάκρυνση και η φορά κίνησης του σημείου Α;

$$[\mathbf{A\pi.}: \text{a) Από το Β προς το Α, } \beta) f=20 \text{ Hz, } \gamma) \Delta x=30 \text{ m, } \delta) \text{ Στη θέση ισορροπίας, κινούμενο κατά τη θετική φορά}]$$

5. Ένα ημιτονοειδές κύμα συχνότητας $f=50$ Hz και πλάτους $A=0,2$ m διαδίδεται με ταχύτητα $u=36$ m/s κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής, η οποία βρίσκεται στην αρχή O του άξονα είναι $y=A\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$. Θεωρούμε δύο σημεία A και B του μέσου.

α. Πόσο απέχουν μεταξύ τους τα σημεία, A και B , αν την ίδια χρονική στιγμή οι φάσεις της ταλάντωσης των σημείων αυτών διαφέρουν κατά $\Delta\phi=60^\circ$;

β. Πόση είναι η μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του σημείου A μέσα σε χρόνο $\Delta t=10^{-2}$ s.

γ. Πόση είναι η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης μιας στοιχειώδους μάζας $\Delta m=2\cdot 10^{-3}$ kg του μέσου, η οποία βρίσκεται στο σημείο A ;

Δίνεται: $\pi^2=10$.

[Απ.: α) $\Delta x=12$ cm, β) $\Delta\phi_A=180^\circ$, γ) $U_{(\max)}=4$ J]

6. Ένα γραμμικό ελαστικό μέσο έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$. Μια πηγή παραγωγής ημιτονοειδών κυμάτων, η οποία βρίσκεται στην αρχή O του άξονα $x'x$, αρχίζει τη χρονική στιγμή $t=0$ να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y=10\eta\mu\omega t$ (το y είναι σε cm και το t σε s). Το παραγόμενο κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Πάνω στον άξονα βρίσκονται δύο σημεία A και B του ελαστικού μέσου, τα οποία απέχουν από την αρχή O αποστάσεις $x_A=20$ cm και $x_B=30$ cm, αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή $t=0,2$ s το κύμα φτάνει στο σημείο A και η φάση της ταλάντωσης της πηγής είναι $\phi=8\pi$ rad.

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα ταλάντωσης της πηγής.

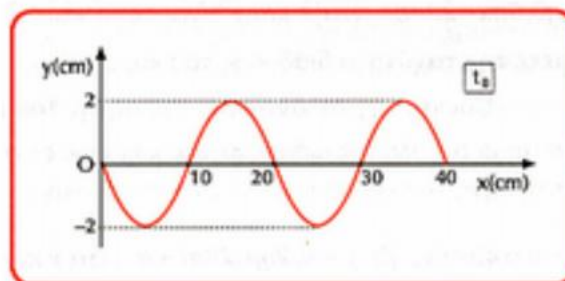
β. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του κύματος.

γ. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

δ. Να προσδιορίσετε τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος AB , τα οποία βρίσκονται σε συμφωνία φάσης με την πηγή του κύματος.

[Απ.: α) $f=20$ Hz, β) $\lambda=5$ cm, γ) $y=10\eta\mu 2\pi(20t - \frac{x}{5})$ (τα x και y είναι σε cm και το t σε s),
γ) $x=20$ cm, $x=25$ cm, $x=30$ cm]

7. Κατά μήκος ενός σχοινιού, το οποίο έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Η αρχή O του άξονα ταυτίζεται με το αριστερό άκρο του σχοινιού, το οποίο αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t=0$ με εξίσωση $y=A\eta\mu 5\pi t$ (το y είναι σε cm και το t σε s). Στο διάγραμμα του σχήματος δίνεται ένα στιγμιότυπο του κύματος που διαδίδεται κατά μήκος του σχοινιού, κατά τη χρονική στιγμή t_0 .



α. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή t_0 .

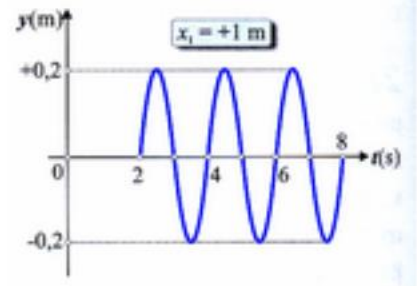
β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

γ. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

δ. Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων δύο σημείων του σχοινιού, στα οποία το κύμα φτάνει με διαφορά χρόνου $\Delta t=1$ s.

[Απ.: α) $t_0=0,8$ s, β) $u=0,5$ m/s, γ) $y=2\eta\mu\pi(5t - \frac{x}{10})$, (τα x και y είναι σε cm και το t σε s), δ) $\Delta\phi=5\pi$]

8. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που βρίσκεται στη διεύθυνση του άξονα $x'Ox$ διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Η πηγή του κύματος βρίσκεται στην αρχή O του άξονα και τη χρονική στιγμή $t=0$ ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας της με θετική ταχύτητα. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός υλικού σημείου K ($x=+1$ m) μάζας $m=0,02$ kg σε συνάρτηση με το χρόνο.



α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

β) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1=5$ s.

δ) Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου K τη χρονική στιγμή $t_2=4,25$ s. Θεωρήστε για τις πράξεις: $\pi^2=10$.

[Απ.: α) $v=0,5$ m/s β) $y=0,2\eta\mu 2\pi(0,5t - x)$ (S.I.) γ) ... δ) $U=2\cdot 10^{-3}$ J]

9. Μία πηγή αρμονικών κυμάτων βρίσκεται στην αρχή O του θετικού ημιάξονα Ox και τη χρονική στιγμή $t=0$ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y=0,04\eta\mu 4\pi t$ (S.I.). Το αρμονικό κύμα που δημιουργείται διαδίδεται σε ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα Ox . Δύο υλικά σημεία K και Λ του ελαστικού μέσου που βρίσκονται στις θέσεις $x_1=+1,2$ m και $x_2=+2$ m αντίστοιχα, φτάνουν το καθένα για πρώτη φορά σε θέση μέγιστης δυναμικής ενέργειας με χρονική διαφορά $\Delta t=2$ s.

α) Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

β) Να υπολογίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες τα σημεία K και Λ φτάνουν στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης τους για πρώτη φορά.

γ) Να υπολογίσετε πόσα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου έχουν μέγιστη κινητική ενέργεια τη χρονική στιγμή $t=3$ s.

δ) Να υπολογίσετε πόσα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου έχουν δυναμική ενέργεια ίση με $\frac{U_{\max}}{4}$, τη χρονική στιγμή που το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $d=1$ m από το σημείο O .

[Απ.: α) $y=0,04\eta\mu 2\pi(2t - 5x)$ (S.I.) β) $t_K=3,125$ s, $t_\Lambda=5,125$ s
γ) 13 σημεία (μαζί με την πηγή) δ) 20 σημεία]

10. Πηγή αρμονικών κυμάτων συχνότητας $f=4$ Hz βρίσκεται στην αρχή O του άξονα $x'Ox$ και δημιουργεί εγκάρσιο κύμα με μήκος κύματος $\lambda=0,5$ m, που διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο, στη διεύθυνση του άξονα $x'Ox$. Η εξίσωση του κύματος είναι της μορφής $y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ (S.I.).

α) Να υπολογίσετε τη φάση της ταλάντωσης:

i) του υλικού σημείου K ($x_1=+0,5$ m) τη χρονική στιγμή $t_1=2$ s,

ii) του υλικού σημείου M ($x_2=+6$ m) τη χρονική στιγμή $t_2=2,5$ s.

Να ερμηνεύσετε το πρόσημο της φάσης της ταλάντωσης του σημείου M .

β) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του σημείου K στη χρονική διάρκεια $\Delta t=t_2-t_1=0,5$ s.

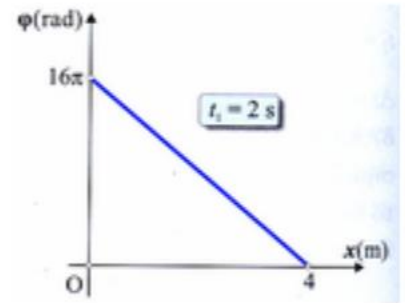
γ) Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ ($x_3=+0,75$ m) την ίδια χρονική στιγμή.

δ) Μετά από πόσο χρόνο από τη στιγμή που διέρχεται το ένα από τα υλικά σημεία K ή Λ από τη θέση ισορροπίας του θα διέλθει και το άλλο από τη δική του θέση ισορροπίας;

ε) Αν κάποια χρονική στιγμή το υλικό σημείο K βρίσκεται στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης, σε ποια θέση βρίσκεται το υλικό σημείο Λ την ίδια χρονική στιγμή;

[Απ.: α) $\varphi_K=14\pi$ rad, $\varphi_M=-4\pi$ rad β) $\Delta\varphi=4\pi$ rad γ) $\Delta\varphi=\pi$ rad δ) $\Delta t=0,125$ s ε) $\gamma_\Lambda=-A$]

11. Μία πηγή αρμονικών κυμάτων βρίσκεται στην αρχή O του άξονα $x'Ox$ και δημιουργεί εγκάρσια κύματα σε ελαστικό μέσο το οποίο συμπίπτει με τη διεύθυνση του άξονα $x'Ox$. Το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα με ταχύτητα u . Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή $t_1=2$ s. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ενός υλικού σημείου του ελαστικού μέσου μάζας $m=2\cdot 10^{-3}$ kg, ισούται με $256\cdot 10^{-4}$ J.



α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης της πηγής καθώς και την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.

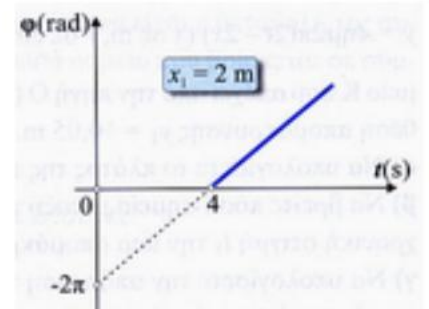
β) Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη θέση x των σημείων του ελαστικού μέσου ($\varphi=f(x)$), τη χρονική στιγμή $t_2=3$ s.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου K ($x_1=+4$ m) σε συνάρτηση με το χρόνο ($\varphi=f(t)$).

[Απ.: α) $\omega=8\pi$ rad/s, $u=2$ m/s β) $y=0,2\eta\mu 2\pi(4t - 2x)$ (S.I.) γ) ... δ) ...]

12. Σε χορδή μεγάλου μήκους διαδίδεται αρμονικό κύμα με ταχύτητα u . Η πηγή του κύματος βρίσκεται στο αριστερό άκρο O ($x=0$) της χορδής και εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση της μορφής $y=0,1\eta\mu\omega t$ (S.I.). Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της φάσης της ταλάντωσης ενός υλικού σημείου M της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x_1=2$ m σε συνάρτηση με το χρόνο.



α) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

β) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1=4$ s.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης της ταλάντωσης ενός υλικού σημείου K της χορδής σε συνάρτηση με το χρόνο, αν το σημείο αυτό απέχει από το άκρο O της χορδής απόσταση $x_2=4$ m.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με την απόσταση x από το σημείο O , τη χρονική στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται το υλικό σημείο K της χορδής.

[Απ.: α) $y=0,1\eta\mu 2\pi(0,25t - 0,5x)$ (S.I.) β) ... γ) ... δ) ...]

13. Εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους $A=0,2$ m και μήκους κύματος $\lambda=0,1$ m διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου με ταχύτητα $u=0,25$ m/s. Υλικό σημείο K του ελαστικού μέσου βρίσκεται σε απόσταση $x_1=0,55$ m από την πηγή του κύματος και τη χρονική στιγμή $t_1=2,85$ s, πέντε σημεία του μέσου μεταξύ της πηγής O και του σημείου K βρίσκονται σε συμφωνία φάσης με την πηγή. Τη χρονική στιγμή $t=0$ η πηγή διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της με θετική ταχύτητα.

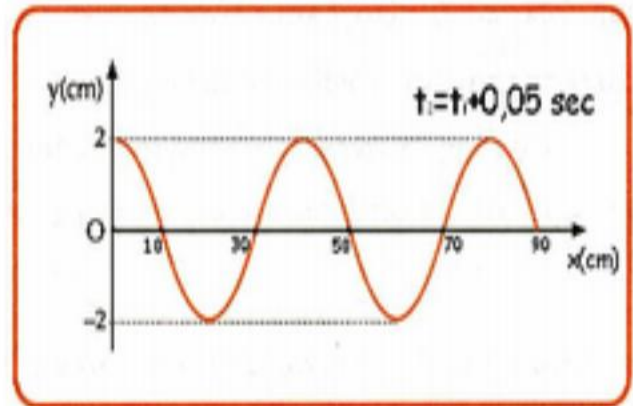
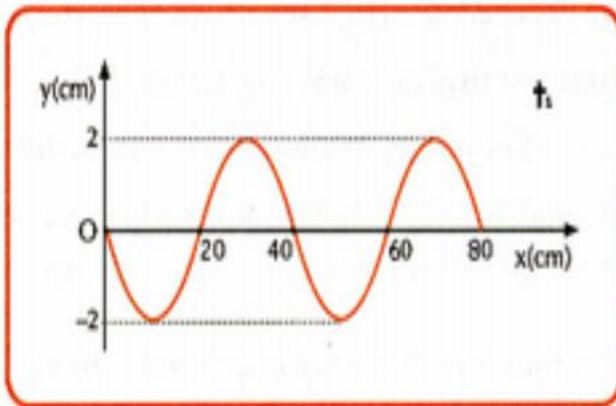
α) Να εξετάσετε αν το σημείο K βρίσκεται σε συμφωνία ή σε αντίθεση φάσης με την πηγή.

β) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημείου K από τη θέση ισορροπίας του, τη χρονική στιγμή t_1 .

γ) Αν μεταβάλλουμε τη συχνότητα της πηγής, πόση πρέπει να είναι η μεταβολή της συχνότητας, ώστε το σημείο K να είναι το 22ο κατά σειρά σημείο που βρίσκεται σε συμφωνία φάσης με την πηγή;

[Απ.: α) αντίθεση φάσης β) $y_K=-0,1\sqrt{2}$ m γ) $\Delta f=+7,5$ Hz]

14. Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνονται δύο στιγμιότυπα ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά μήκος τεντωμένου νήματος Σ_1 μήκους $L=4$ m. Η πηγή του κύματος βρίσκεται στο αριστερό άκρο O του νήματος, το οποίο κατά τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και κινείται κατά τη θετική φορά.



- α) Υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος u_1 στο νήμα Σ_1 .
 β) Γράψτε την εξίσωση του κύματος στο νήμα Σ_1 .
 γ) Το δεξιό άκρο του νήματος Σ_1 είναι ενωμένο με το αριστερό άκρο δεύτερου νήματος Σ_2 από διαφορετικό υλικό, ώστε τα δύο νήματα να βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Όταν το κύμα φθάνει στο κοινό σημείο K των δύο νημάτων συνεχίζει να διαδίδεται στο νήμα Σ_2 με ταχύτητα $u_2=4$ m/s χωρίς απώλεια ενέργειας. Ποια η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου K με το χρόνο.
 δ) Να γραφεί η εξίσωση του κύματος στο νήμα Σ_2 .