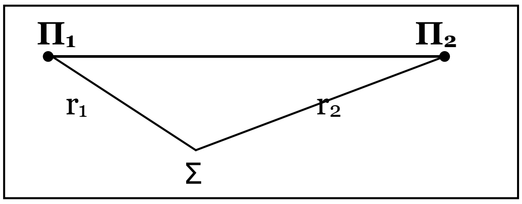
ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ



1. **Η εξίσωση ταλάντωσης** ενός σημείου Σ της επιφάνειας υγρού, από τη στιγμή που συμβάλουν και τα δύο κύματα σ' αυτό είναι:

$$\boxed{y = 2A\,\text{συν}2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\,\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)} \quad (1) \quad \text{για } t \geq r_2/υ$$

Ο όρος $\boxed{A' = 2A\,\text{συν}2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}}$ για το συγκεκριμένο σημείο Σ, είναι σταθερός και η απόλυτη τιμή του: $|A'|$ είναι το πλάτος ταλάντωσης του Σ οπότε η σχέση (1) γράφεται:

$$\boxed{y = A'\,\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)} \quad \text{για } t \geq r_2/υ$$

> Όπως βλέπουμε η σχέση αυτή παριστάνει Α.Α.Τ. με πλάτος $|A'|$ και φάση : $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$

2. ***Πλάτος ταλάντωσης***

Για να βρούμε αν σε ένα σημείο Σ της επιφάνειας υγρού, όπου συμβάλλουν δύο σύγχρονα κύματα, έχουμε ενίσχυση ή απόσβεση, διαιρούμε τη διαφορά των αποστάσεων $|r_1 - r_2|$ του σημείου Σ από της δύο πηγές των κυμάτων με το κοινό μήκος κύματος λ των δύο κυμάτων, οπότε:

- Αν το πηλίκο $\boxed{\frac{|r_1 - r_2|}{\lambda}}$ είναι ένας <u>ακέραιος αριθμός</u>, τότε στο σημείο Σ έχουμε ταλάντωση με μέγιστο πλάτος $|A'| = 2A$ (**ενίσχυση**).

- Αν το πηλίκο $\boxed{\frac{|r_1 - r_2|}{\lambda}}$ είναι το <u>μισό ενός ακέραιου περιττού αριθμού</u>, τότε στο σημείο Σ έχουμε ταλάντωση με πλάτος $|A'| = 0$ (**απόσβεση**).

- Αν το πηλίκο $\frac{|r_1 - r_2|}{\lambda}$ δεν είναι τίποτα από τα παραπάνω, τότε στο σημείο Σ δεν έχουμε ούτε ενίσχυση ούτε απόσβεση. Στη περίπτωση αυτή το πλάτος της ταλάντωσης στο Σ υπολογίζεται με αντικατάσταση στη γνωστή σχέση του πλάτους σχέση (2).

► Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ μετά την συμβολή των κυμάτων δίνεται από τη σχέση $|A'| = \mathbf{2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right)\right|}$ **(2).**

► Αν t_1 είναι η χρονική στιγμή που το κύμα της Π_1 φτάνει στο Σ και t_2 η χρονική στιγμή που το κύμα της Π_2 φτάνει στο Σ και $\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta}$ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο μέσο, τότε ισχύουν οι σχέσεις: $r_1=\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta}\cdot t_1$ και $r_2=\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta}\cdot t_2$
Αντικαθιστώντας τα r_1 και r_2 στην (2) προκύπτει:

$$|A'| = \mathbf{2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right)\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta}\cdot t_1-\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta}\cdot t_2}{2\lambda}\right)\right|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta}(t_1-t_2)}{2\lambda}\right)\right|} \quad \mathbf{(3)}$$

Επειδή ισχύει η σχέση $\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta}= \lambda \cdot f$ η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\mathbf{|A'| = 2A|\sigma\upsilon\nu\pi f(t_1-t_2)|\ (4)}$$

► Για τη διαφορά φάσης των δύο κυμάτων στο Σ ισχύει:

Οι φάσεις των επιμέρους ταλαντώσεων ενός σημείου Σ που απέχει αποστάσεις r_1 και r_2 από τις δύο πηγές είναι: $\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)$ και $\varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right)$ άρα (για το αρχικό σχήμα $r_1<r_2$) έχουμε: $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ή $\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right)$ ή $\boxed{\mathbf{\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{r_2-r_1}{\lambda}\right)}}$

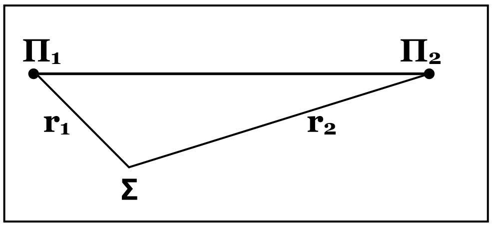
άρα $\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi(r_2-r_1)}{\lambda} = \frac{2\pi(r_2-r_1)}{2\lambda}$ άρα η σχέση (2) γράφεται: $\mathbf{|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\Delta\varphi}{2}\right|}$ **(5)**

Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι το πλάτος της ταλάντωσης βρίσκεται αν γνωρίζουμε:
1^ο^ : τη διαφορά των αποστάσεων $\Delta r=r_1-r_2$ (σχέση 2)
2^ο^ : τη διαφορά των χρόνων άφιξης $\Delta t= t_1-t_2$ των κυμάτων (σχέσεις 3, 4)
3^ο^ : τη διαφορά φάσης $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2$ των δυο κυμάτων (σχέση 5)

Αν ζητείται το είδος της συμβολής σ' ένα σημείο Σ. Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος της ταλάντωσης με τον τύπο: $|A'| = \mathbf{2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right)\right|}$

► Αν $\mathbf{|A'|=2A}$, τότε έχουμε ενισχυτική συμβολή.
► Αν $\mathbf{|A'|=0}$, τότε έχουμε ακυρωτική συμβολή.
► Αν $\mathbf{0 \le |A'| \le 2A}$, τότε δεν έχουμε ούτε ενίσχυση ούτε απόσβεση.

3. ***Απομάκρυνση των σημείων του μέσου***



Έστω ότι το σημείο Σ απέχει από την πηγή $Π_1$ απόσταση r_1, ενώ από την πηγή $Π_2$ απόσταση r_2, και ισχύει $r_2 > r_1$. Τότε αν υ είναι η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού θα έχω τις εξής περιπτώσεις:

- Για $\boxed{0 \le t < t_1 = \frac{r_1}{\upsilon}}$ είναι $\boxed{\mathbf{y = 0}}$, αφού κανένα κύμα δεν έχει φτάσει στο Σ.

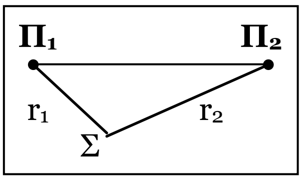
- Για $\boxed{t_1 \le t < t_2 = \frac{r_2}{\upsilon}}$ είναι $\boxed{\mathbf{y = Aημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{λ}\right)}}$, αφού στο Σ έχει φτάσει μόνο

το κύμα της πηγής $Π_1$.

- Για $\boxed{t \ge t_2}$ είναι $\boxed{\mathbf{y = 2Aσυν2π\frac{r_1 - r_2}{2λ}ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2λ}\right)}}$ αφού στο Σ

έχουν φτάσει και τα δύο κύματα και συμβάλλουν και όπως παρατηρούμε η εξίσωση αυτή παριστάνει ΑΑΤ αφού για συγκεκριμένο σημείου του μέσου τα: $r_1 - r_2$ και $r_1 + r_2$ είναι σταθερά.

4. ***Ταχύτητα και επιτάχυνση των σημείων του μέσου***



Για το σημείο Σ του μέσου, της περίπτωσης 2. θα ισχύει:

- Για $\boxed{0 \le t < t_1 = \frac{r_1}{\upsilon}}$ είναι $\boxed{\upsilon = 0 \quad \text{και} \quad α = 0.}$

- Για $\boxed{t_1 \le t < t_2 = \frac{r_2}{\upsilon}}$ είναι $\boxed{\upsilon = ωAσυν2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{λ}\right)}$

και $\boxed{α = -ω^2 y = -ω^2 Aημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{λ}\right)}$

▸ Για $\boxed{t \geq t_2}$ είναι $\boxed{\upsilon = \omega A' \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right)}$ και

$\boxed{\alpha = -\omega^2 y = -\omega^2 A' \ \eta\mu \ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right)}$ όπου $\boxed{A' = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right)}$ και $|A'|$ το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ.

5. ***<u>Συχνότητες για τις οποίες έχουμε ενίσχυση ή απόσβεση.</u>***

▸ Για τα σημεία ενισχυτικής συμβολής έχω : $|r_1 - r_2| = N\lambda$ ή $|r_1 - r_2| = N\frac{\upsilon}{f}$ ή

$f = N\frac{\upsilon}{|r_1 - r_2|}$ με N = 0, 1, 2, ……. Η ελάχιστη συχνότητα για την οποία έχουμε **ενίσχυση** προκύπτει για N = 1 και είναι ίση με

$$\boxed{f_{min} = \frac{\upsilon}{|r_1 - r_2|}}$$

▸ Για τα σημεία αποσβεστικής συμβολής έχω : $|r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ ή

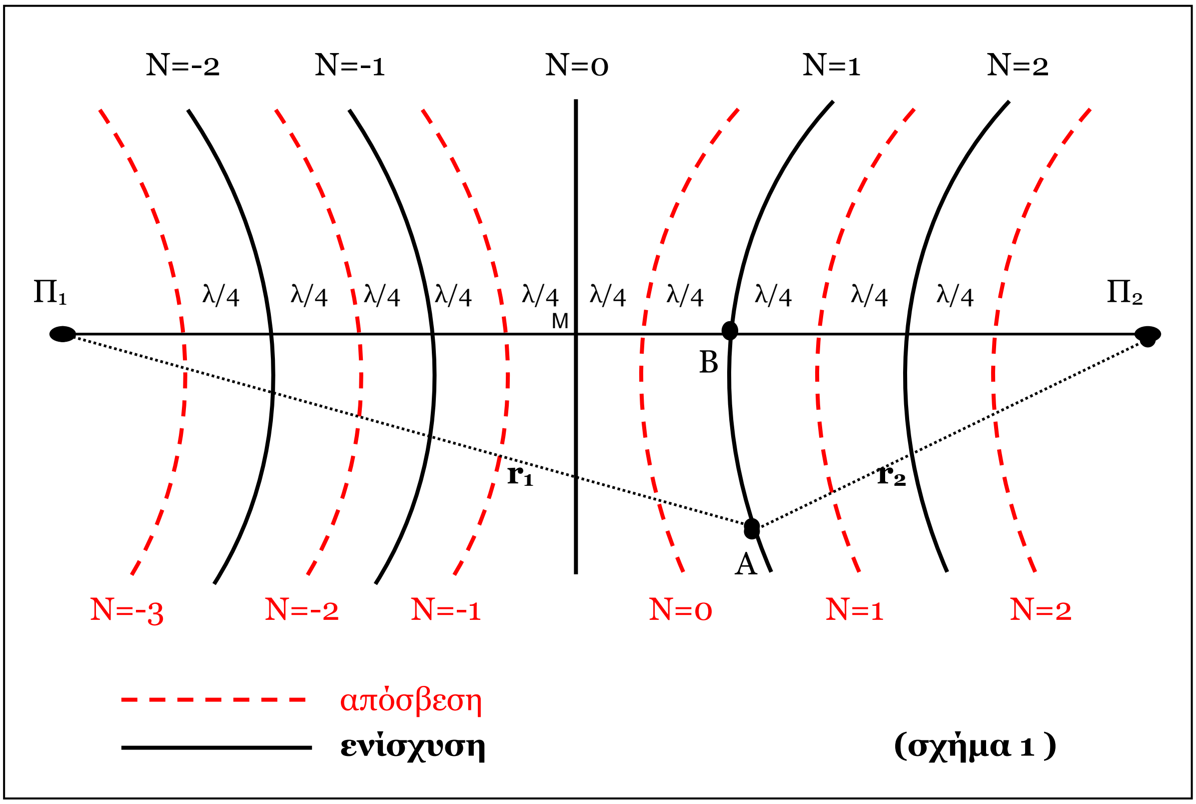
$|r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\upsilon}{2f}$ ή $f = (2N+1)\frac{\upsilon}{2|r_1 - r_2|}$ με N = 0, 1, 2, ……. Η ελάχιστη

συχνότητα για την οποία έχουμε **απόσβεση** προκύπτει για N = 0 και είναι ίση με

$$\boxed{f_{min} = \frac{\upsilon}{2|r_1 - r_2|}}$$

6. ***Υπερβολές ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής***

Όλα τα σημεία ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής βρίσκονται πάνω σε υπερβολές όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α) Ενίσχυση: $\mathbf{r_1 - r_2 = N\lambda}$ όπου $\mathbf{N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$

Οι θετικές τιμές του N αντιστοιχούν σε σημεία δεξιά της μεσοκαθέτου ($r_1 - r_2 > 0$ άρα $r_1 > r_2$).

Οι αρνητικές τιμές του N αντιστοιχούν σε σημεία αριστερά της μεσοκαθέτου ($r_1 - r_2 < 0$ άρα $r_1 < r_2$).

β) Απόσβεση: $\mathbf{r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}}$ όπου $\mathbf{N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$

Οι θετικές τιμές του N αντιστοιχούν σε σημεία δεξιά της μεσοκαθέτου ($r_1 - r_2 > 0$ άρα $r_1 > r_2$).

Οι αρνητικές τιμές του N αντιστοιχούν σε σημεία αριστερά της μεσοκαθέτου ($r_1 - r_2 < 0$ άρα $r_1 < r_2$).

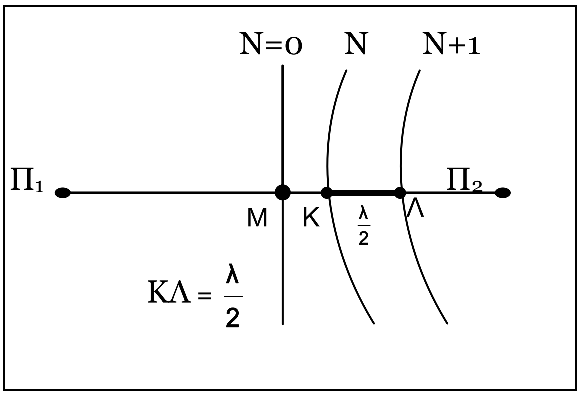
7. Όπως παρατηρούμε από το σχήμα ο αριθμός των υπερβολών ενίσχυσης που τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ είναι **περιττός**, ενώ ο αντίστοιχος αριθμός των υπερβολών απόσβεσης είναι **ζυγός**.

8. Η υπερβολή ενισχυτικής συμβολής που περνά από το σημείο Α, τέμνει την $Π_1Π_2$ στο σημείο Β. Επειδή για το Α ισχύει: $ΑΠ_1 - ΑΠ_2 = λ$ (Ν = 1), η ίδια σχέση θα ισχύει και για το Β γιατί βρίσκεται στην ίδια υπερβολή με το Α, δηλαδή: $ΒΠ_1 - ΒΠ_2 = λ$ (Ν = 1).

Επίσης όσες υπερβολές απόσβεσης ή ενίσχυσης τέμνουν το τμήμα $Π_1Β$ τέμνουν και το τμήμα $Π_1Α$ (r_1).

9. ***<u>Εύρεση της απόστασης μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου.</u>***

Αν τα σημεία βρίσκονται πάνω σε υπερβολές ενίσχυσης(Κ, Λ) τότε :



$ΚΠ_1 - ΚΠ_2 = Νλ$
για το αμέσως επόμενο σημείο ενίσχυσης Κ έχω:
$ΛΠ_1 - ΛΠ_2 = (Ν+1)λ$
οπότε αφαιρώντας κατά μέλη
$ΛΠ_1 - ΚΠ_1 + ΚΠ_2 - ΛΠ_2 = λ$ άρα
$ΛΚ + ΚΛ = λ \rightarrow 2ΚΛ = λ \rightarrow ΚΛ = \frac{λ}{2}$

Όμοια αποδεικνύεται ότι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων απόσβεσης είναι $Δx = \frac{λ}{2}$, ενώ η απόσταση μεταξύ ενός σημείου ενίσχυσης και του αμέσως επόμενου σημείου απόσβεσης είναι $Δx = \frac{λ}{4}$.

10. ***<u>Αριθμός υπερβολών ενίσχυσης ή απόσβεσης μεταξύ των δύο πηγών</u>***

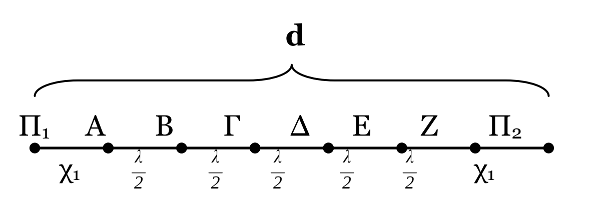
Έστω ότι στο σημείο Β (σχήμα 1), έχουμε ενισχυτική συμβολή και $Π_1Π_2 = d$. Τότε:

$Π_1Β - Π_2Β = Νλ$ ή $Π_1Β - (d - Π_1Β) = Νλ$ ή $2Π_1Β = d + Νλ$ ή $Π_1Β = \frac{d+N\lambda}{2}$

Επειδή ισχύει $0 < Π_1Β < d$, έχουμε: $0 < \frac{d+N\lambda}{2} < d$ ή $0 < \frac{d}{2} + \frac{N\lambda}{2} < d$ ή $-\frac{d}{2} < \frac{N\lambda}{2} < \frac{d}{2}$ ή $\boxed{-\frac{d}{\lambda} < N < \frac{d}{\lambda}}$ από τη σχέση αυτή υπολογίζουμε τις τιμές του Ν και επομένως και των αριθμό των υπερβολών ενισχυτικής συμβολής μεταξύ των δύο πηγών. Όμοια δουλεύουμε όταν θέλουμε να βρούμε των αριθμό των υπερβολών αποσβεστικής συμβολής μεταξύ των δύο πηγών.

11. Προσοχή χρειάζεται όταν έχουμε **φραστικά δεδομένα**, τα οποία μεταφράζονται αμέσως όταν κάνουμε ένα απλό σχήμα. π.χ.

« *Αν το $\lambda = 2$ m και μεταξύ των δύο πηγών δημιουργούνται 6 σημεία αποσβεστικής συμβολής (τα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ) και το πλησιέστερο από αυτά σημεία απέχει από την πηγή $Π_1$ απόσταση $x_1 = 0{,}5$ m, να βρείτε την απόσταση d των δύο πηγών*.»



$\Rightarrow$

Το φραστικό δεδομένο με τη βοήθεια του σχήματος μας δίνει:

$d = 5\,\frac{\lambda}{2} + 2x_1$ άρα

$d = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}5 = 6$ m.

12.

Ο αριθμός των σημείων ενίσχυσης ή απόσβεσης πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να αλλάξει, αν μεταβληθεί:

α) το μήκος κύματος λ

β) ή η συχνότητα f

γ) ή η απόσταση d των δύο πηγών

Στην περίπτωση αυτή το ζητούμενο βρίσκεται κάνοντας ένα καινούργιο σχήμα ή από τις σχέσεις : $x_1 - x_2 = N'\lambda'$ ή $x_1 - x_2 = (2N'+1)\lambda'/2$ αντίστοιχα.

13. Γενικά η <u>κατασκευή ενός σχήματος</u> και στο ποιο απλό ερώτημα, οδηγεί στην πιο εύκολη λύση του ερωτήματος.

14. Επειδή όλα τα σημεία ενός μέσου, στο οποίο συμβάλουν δύο κύματα εκτελούν Α.Α.Τ. ένα πρόβλημα συμβολής μπορεί πολύ εύκολα να μετατραπεί σε πρόβλημα Α.Α.Τ.