Άσκηση 1.

Μια πηγή Ο που βρίσκεται στην αρχή του άξονα x'x, αρχίζει να εκτελεί τη χρονική στιγμή t=0, απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y_0 = 6\cdot 10^{-2}\eta\mu\pi t$ (S.I.). Το παραγόμενο γραμμικό αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x'x με ταχύτητα $u = 8\ m/s$ σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο.

α) Να βρείτε την περίοδο, τη συχνότητα και το μήκος κύματος.

β) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

γ) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει να κινείται ένα σημείο Μ του άξονα x'x που βρίσκεται στη θέση $x = 20\ m$;

δ) Να βρείτε τη φάση του σημείου Μ τις χρονικές στιγμές: $t_1 = 1{,}5\,s$ και $t_2 = 2{,}5\,s$.

ε) Να γράψετε για το σημείο Μ την εξίσωση της απομάκρυνσης y σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

<u>Λύση</u>

α) Συγκρίνοντας την εξίσωση της απομάκρυνσης y_O του σημείου Ο από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο t, με την εξίσωση της εκφώνησης, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} y_o &= 6\cdot 10^{-2}\eta\mu\pi t \\ y_o &= A\eta\mu\frac{2\pi t}{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi t \Rightarrow T = 2s\,,\ f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}Hz \Rightarrow f = 0{,}5Hz$$

όπου Τ η περίοδος, f η συχνότητα και Α το πλάτος του κύματος.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής υπολογίζουμε το μήκος κύματος λ:

$$u = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = uT = 8\cdot 2m \Rightarrow \lambda = 16m$$

β) Από τη σχέση που δίνει την εξίσωση κύματος που διαδίδεται κατά τη θετική φορά: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, με αντικατάσταση, προκύπτει:

$$y = 6\cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{16}\right) \text{ (S.I.)}$$

γ) Οδεύοντας το κύμα με σταθερή ταχύτητα u=8 m/s πρέπει να διανύσει την απόσταση x.

Ισχύει: $u = \frac{x}{t^*} \Rightarrow t^* = \frac{x}{u} = \frac{20}{8}s \Rightarrow t^* = 2{,}5s$

δ) Από τον τύπο της φάσης: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, με αντικατάσταση, η φάση του σημείου Μ ως συνάρτηση του χρόνου, γράφεται:

$$\varphi_M = 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{20}{16}\right) \text{ (S.I.) για } t \geq 2,5\text{s}$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,55\text{s}$ η διαταραχή δεν έχει φτάσει στο σημείο Μ, κατά συνέπεια το σημείο Μ δεν έχει αρχίσει την ταλάντωσή του και ο υπολογισμός της φάσης του με την παραπάνω σχέση δεν έχει νόημα.

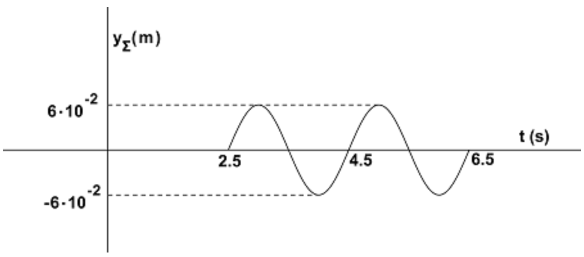
ε) Η σχέση που δίνει την εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου Μ από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 6\cdot10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{16}\right) \Rightarrow y_M = 6\cdot10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{20}{16}\right) \text{ (S.I.) για}$$

$t \geq 2,5\text{s}$ (1)

Για τη χάραξη της γραφικής παράστασης της παραπάνω εξίσωσης θα βασιστούμε στον παρακάτω πίνακα τιμών:

$t(s)$	$y\ (m)$
2,5	0
3	$6\cdot10^{-2}$
3,5	0
4	$-6\cdot10^{-2}$
...	...



Άσκηση 2.

Μια πηγή Ο αρχίζει να εκτελεί, τη χρονική στιγμή t=0, απλή αρμονική ταλάντωση. Το παραγόμενο από την πηγή αρμονικό γραμμικό κύμα διαδίδεται σε ομογενές ελαστικό μέσο κατά τη θετική κατεύθυνση x΄x και έχει εξίσωση: $y = 5\cdot 10^{-2}\eta\mu\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{5}\right)$ (S.I.).

α) Να υπολογίσετε την περίοδο, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης αυτού του κύματος.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση στην οποία θα έχει φθάσει το κύμα τη χρονική στιγμή $t_1 = 13s$.

γ) Να βρείτε τις φάσεις των σημείων $x_N = 32{,}5m$ και $x_K = 36m$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 13s$.

δ) Να γράψετε τις εξισώσεις της φάσης $\varphi = f(x)$, της απομάκρυνσης $y = f(x)$, και της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης $U = f(x)$ σε συνάρτηση με την απόσταση x από την πηγή Ο, τη χρονική στιγμή $t_1 = 13s$. Να θεωρήσετε ότι κάθε στοιχειώδες τμήμα του σχοινιού έχει μάζα $m = 2\cdot 10^{-3}kg$.

ε) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 13s$ να βρείτε για το σημείο Λ με απόσταση από την πηγή $x_Λ$=20 m:

i) τη φάση του.

ii) την απομάκρυνσή του y από τη θέση ισορροπίας του.

iii) τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης μάζας του σχοινιού $m = 2\cdot 10^{-3}kg$ που ταλαντώνεται στο παραπάνω σημείο.

<u>Λύση</u>

α) Από τη σχέση που δίνει την εξίσωση του κύματος, με σύγκριση προκύπτουν:

$$\begin{cases} y = 5\cdot 10^{-2}\eta\mu\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{5}\right) \\ y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5\cdot 10^{-2}\eta\mu\left(\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi x}{5}\right) \\ y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi t}{2} \\ \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi x}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 4s \\ \lambda = 10m \end{cases}$$

όπου Τ η περίοδος, λ το μήκος και Α το πλάτος του κύματος.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης αυτού του κύματος:

$$u = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow u = \frac{10}{4}m/s \Rightarrow u = 2{,}5m/s$$

β) Το κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα u=2,5 m/s και τη χρονική στιγμή t_1 θα έχει διανύσει απόσταση: $u=\frac{x^*}{t_1}\Rightarrow x^*=ut_1=2,5\cdot 13m\Rightarrow x^*=32,5m$

γ) Η εξίσωση της φάσης: $\varphi=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$, την χρονική στιγμή t_1=13 s παίρνει τη μορφή:

$$\varphi\left(t_1=13s\right)=2\pi\left(\frac{13}{4}-\frac{x}{10}\right),\ x\leq 32,5m\ (S.I.)$$

Για το σημείο Ν:

$\varphi_N\left(t_1=13s\right)=2\pi\left(\frac{13}{4}-\frac{32,5}{10}\right)rad\Rightarrow \varphi_N\left(t_1=13s\right)=0$, το οποίο σημαίνει ότι αυτή τη χρονική στιγμή το κύμα έφθασε στο σημείο Ν, $x=32,5m$.

Για το σημείο Κ:

Η διαταραχή δεν έχει φτάσει στο σημείο Κ, κατά συνέπεια το σημείο Κ δεν έχει αρχίσει την ταλάντωσή του και ο υπολογισμός της φάσης του με την παραπάνω σχέση δεν έχει νόημα.

δ) Η εξίσωση της φάσης σε συνάρτηση με την θέση x τη στιγμή t_1 είναι:

$$\varphi=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\Rightarrow\varphi=2\pi\left(\frac{t}{4}-\frac{x}{10}\right)rad\Rightarrow\varphi\left(t_1\right)=2\pi\left(\frac{13}{4}-\frac{x}{10}\right),\ x\leq 32,5m\quad (S.I.)\ (1)$$

Η εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με την θέση x τη στιγμή t_1 είναι:

$$y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\Rightarrow y=5\cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{4}-\frac{x}{10}\right)\Rightarrow$$
$$y\left(t_1\right)=5\cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{13}{4}-\frac{x}{10}\right),\ x\leq 32,5m\quad (S.I.)\ (2)$$

Η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης σε συνάρτηση με την θέση x τη στιγμή t_1 είναι:

$$U=\frac{1}{2}Dy^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\eta\mu^2 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\Rightarrow U=6,25\pi^2\cdot 10^{-7}\eta\mu^2 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{10}\right)\Rightarrow$$
$$U(t_1)=6,25\pi^2\cdot 10^{-7}\eta\mu^2 2\pi\left(\frac{13}{4}-\frac{x}{10}\right),\ x\leq 32,5m\quad (S.I.)\ (3)$$

ε)

i) $\xrightarrow{(1)} \varphi_\Lambda(t_1) = 2\pi\left(\frac{13}{4} - \frac{20}{10}\right)\text{rad} = 2\pi(3,25-2)\text{rad} = 2\pi(1,25)\text{rad} = 2\pi\left(1+\frac{1}{4}\right)\text{rad} \Rightarrow$

$\varphi_\Lambda(t_1) = \left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\text{rad}$ (4)

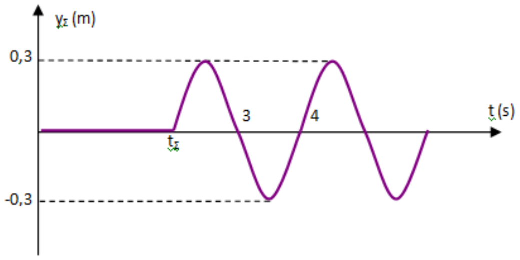
ii) $\xrightarrow{(2),(4)} y_\Lambda(t_1) = 5\cdot10^{-2}\,\eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\text{m} = 5\cdot10^{-2}\,\eta\mu\frac{\pi}{2}\text{m} \Rightarrow y_\Lambda(t_1) = 5\cdot10^{-2}\,\text{m}$

iii) $\xrightarrow{(3),(4)} U_\Lambda(t_1) = 6,25\pi^2\cdot10^{-7}\,\eta\mu^2\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\text{J} = 6,25\pi^2\cdot10^{-7}\,\eta\mu^2\frac{\pi}{2}\text{J} \Rightarrow$

$U_\Lambda(t_1) = 6,25\pi^2\cdot10^{-7}\,\text{J}$

Άσκηση 3.

Η πηγή Ο που βρίσκεται στην αρχή του άξονα x'x, αρχίζει τη χρονική στιγμή t=0 να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, που περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$. Το κύμα που δημιουργεί, διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου και κατά τη θετική φορά. Ένα σημείο Σ απέχει από την πηγή Ο απόσταση $12\ \text{m}$ και αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική t_Σ. Στη γραφική παράσταση που ακολουθεί φαίνεται η απομάκρυνση του σημείου Σ από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο. Δίνεται $\pi^2 = 10$.



Να υπολογίσετε:

α) Την περίοδο του κύματος.

β) Τη χρονική στιγμή t_Σ και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

γ) Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης ταλάντωσης του σημείου Σ.

δ) Το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Σ όταν θα βρίσκεται στη θέση $y = -0{,}15\text{m}$ από τη θέση ισορροπίας του.

ε) Τη διαφορά φάσης του σημείου Σ μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_1 = 12\text{s}$ και $t_2 = 15\text{s}$.

<u>Λύση</u>

α) Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι: $\frac{T}{2} = (4-3)\text{s} \Rightarrow T = 2\text{s}$

β) Από το διάγραμμα φαίνεται ότι το κύμα φτάνει στο σημείο Σ μισή περίοδο πριν την χρονική στιγμή $t = 3\text{s}$.

Άρα η χρονική στιγμή t_Σ θα είναι:

$$t_\Sigma = \left(3 - \frac{T}{2}\right) \Rightarrow t_\Sigma = 2\text{s}$$

Επειδή το κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα, έχουμε:

$$u = \frac{x_\Sigma}{t_\Sigma} = \frac{12}{2} m/s \Rightarrow u = 6 m/s$$

γ) Η γωνιακή συχνότητα του κύματος είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} rad/s \Rightarrow \omega = \pi \ rad/s$$

Από το διάγραμμα παρατηρούμε επίσης, ότι το πλάτος του κύματος είναι A=0,3 m.

Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης ταλάντωσης του σημείου Σ είναι:

$$|\alpha_{max}| = \omega^2 A = \pi^2 0,3 m/s^2 \Rightarrow \alpha_{max} = 3 m/s^2$$

δ) Αφού το σημείο Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ισχύει η Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης.

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dy^2 + \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow u^2 = \frac{D}{m}\left(A^2 - y^2\right) \xrightarrow{|y|=A/2}$$

$$u = \pm\omega\sqrt{3A^2/4} \Rightarrow u = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\omega A = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pi \cdot 0,3 \ m/s \Rightarrow u = \pm 0,15\pi\sqrt{3} m/s$$

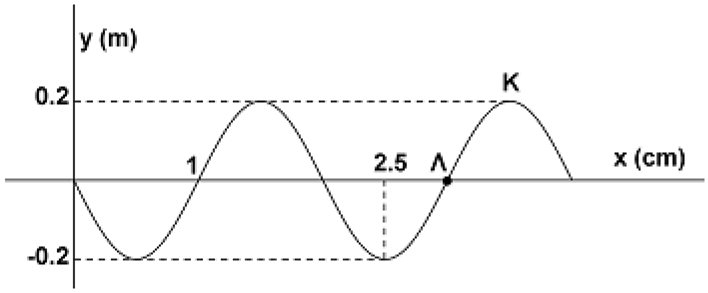
ε) Από την εξίσωση της φάσης του κύματος $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$,

υπολογίζουμε τη διαφορά φάσης του σημείου Σ μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 και t_2:

$$\Delta\varphi_{t_1,t_2} = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_\Sigma}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_\Sigma}{\lambda}\right) = \frac{2\pi}{T}\left(t_2 - t_1\right) = \frac{2\pi}{2}\left(15 - 12\right) rad \Rightarrow \Delta\varphi_{t_1,t_2} = 3\pi \ rad$$

Άσκηση 4.

Η πηγή κύματος Ο αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0,2m$. Το αρμονικό κύμα που δημιουργείται διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, κατά τον άξονα Ox. Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος μετά από χρόνο $t_1 = 10s$.



α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ διάδοσης του κύματος στο ελαστικό μέσο.

β) Να βρείτε την περίοδο Τ του αρμονικού κύματος.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου.

δ) Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

ε) Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_1.

Λύση

α) Από το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι τα τρία τέταρτα του μήκους κύματος είναι $1,5m$

$$\frac{3}{4}\lambda = (2,5-1)m \Rightarrow \lambda = 2m$$

Συμπεραίνουμε επίσης ότι το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση 2λ. Άρα το κύμα διένυσε με σταθερή ταχύτητα απόσταση $x_1 = 4m$ σε χρόνο $t_1 = 10s$.

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος θα είναι:

$$u = \frac{x_1}{t_1} = \frac{4}{10} m/s \Rightarrow u = 0,4m/s$$

β) Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής u=λf, έχουμε:

$$u = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{u} = \frac{2}{0,4} s \Rightarrow T = 5s$$

γ) Όπως είναι γνωστό, το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου δίνεται από τη σχέση:

$\left|u_{max}\right| = \omega A$,

όπου ω η γωνιακή συχνότητα και Α το πλάτος της ταλάντωσης.

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι το πλάτος είναι: $A = 0,2m$

Η γωνιακή συχνότητα είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5} rad/s$

Με αντικατάσταση λοιπόν προκύπτει:

$\left|u_{max}\right| = 8\pi \cdot 10^{-2} m/s$

δ) Από την εξίσωση του κύματος: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$,

με αντικατάσταση προκύπτει:

$y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{5} - \frac{x}{2}\right)$ (SI)

ε) Από το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι

$$x_K = \lambda + \frac{3\lambda}{4} = \frac{7\lambda}{4} \Rightarrow x_K = 3,5m$$

$$x_\Lambda = \lambda + \frac{\lambda}{2} = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow x_\Lambda = 3m$$

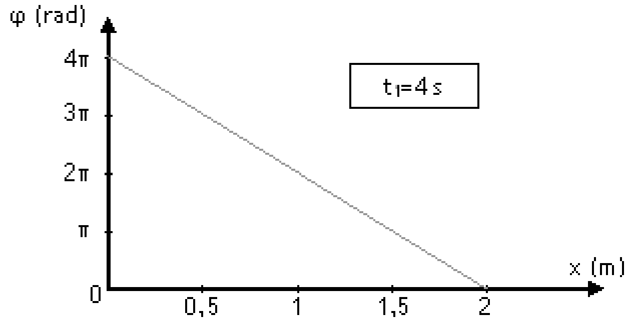
Από την εξίσωση της φάσης του κύματος $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$,

υπολογίζουμε τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Κ και Λ την χρονική στιγμή t_1 :

$$\Delta\varphi_{K,\Lambda} = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(x_K - x_\Lambda\right) = \frac{2\pi}{2} 0,5 \text{ rad} \Rightarrow \Delta\varphi_{K,\Lambda} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Άσκηση 5.

Το σχήμα παρουσιάζει τη γραφική παράσταση $\varphi = f(x)$ της φάσης των σημείων μιας ομογενούς ελαστικής χορδής, στην οποία διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, τη χρονική στιγμή $t_1 = 4\,s$. Το πλάτος της ταλάντωσης των σημείων από τα οποία περνά το κύμα είναι $A = 0,2\,m$. Δύο σημεία Κ και Λ της χορδής βρίσκονται στις θέσεις $x_K = +1\,m$ και $x_\Lambda = +1,5\,m$, αντίστοιχα. Για το σημείο της θέσης $x = 0$ γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα



α) Να γραφεί η εξίσωση του κύματος.

β) Να γραφεί η εξίσωση $u = f(x, t)$ της ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου.

γ) να βρεθούν οι χρονικές στιγμές $t_{(K)}$ και $t_{(\Lambda)}$, στις οποίες τα σημεία Κ και Λ ξεκινούν ταλάντωση.

δ) Να υπολογιστεί η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων των σημείων Κ και Λ την ίδια χρονική στιγμή.

ε) Να γίνει η γραφική παράσταση $\phi = f(t)$ του σημείου Λ, μέχρι τη στιγμή που το σημείο Λ έχει εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση.

στ) Να γίνει η γραφική παράσταση $y = f(t)$ του σημείου Λ, μέχρι τη στιγμή που το σημείο Λ έχει εκτελέσει 2 πλήρεις ταλαντώσεις.

ζ) Να βρεθεί η φορά κίνησης του σημείου Λ, τη χρονική στιγμή t_1.

η) Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 8\,s$.

<u>Λύση</u>

α) Από το σχήμα φαίνεται ότι η φάση της ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου διάδοσης του κύματος μειώνεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Αυτό σημαίνει ότι το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα, επομένως, η εξίσωση του κύματος είναι της μορφής:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Η εξίσωση φάσης για αυτό το κύμα δίνεται από τον τύπο:

$$\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Από τα δεδομένα του σχήματος έχουμε ότι:

για $x = 0$ και $t = 4\,s \Rightarrow \phi = 4\pi\,rad$

Αντικαθιστώντας τις τιμές στην εξίσωση φάσης, έχουμε:

$$4\pi = 4\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \pi\frac{rad}{s}}$$

Επομένως, $\boxed{T = 2\,s}$ και $\boxed{f = 0,5\,Hz}$.

Η εξίσωση φάσης παίρνει τη μορφή:

$$\phi = \pi t - \frac{2\pi x}{\lambda}$$

για $x = 2\,m$ και $t = 4\,s \Rightarrow \phi = 0$

Αντικαθιστώντας τις τιμές στην εξίσωση φάσης, έχουμε:

$$0 = 4\pi - \frac{4\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{4\pi}{\lambda} = 4\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda = 1\,m}$$

Έτσι, η εξίσωση φάσης παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{\phi = \pi t - 2\pi x}$$

Τελικά, η εξίσωση του κύματος παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{y = 0,2\eta\mu\left(\pi t - 2\pi x\right)\ \text{(S. I.)}}$$

β) Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$u_{max} = \omega A \Rightarrow$$

$$\boxed{u_{max} = 0,2\pi\frac{m}{s}}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση της ταχύτητας, έχουμε:

$$u = u_{max}\sigma\upsilon\nu\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{u = 0,2\pi\sigma\upsilon\nu\left(\pi t - 2\pi x\right) \text{ (S. I.)}}$$

γ) Για να βρούμε πότε ένα σημείο του μέσου ξεκίνησε ταλάντωση, μπορούμε να εργαστούμε με διάφορους τρόπους.

Για το σημείο Κ θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση φάσης. Ένα σημείο της χορδής ξεκινά να ταλαντώνεται όταν η φάση του γίνει μηδέν:

$$\phi = \pi t - 2\pi x \Rightarrow 0 = \pi t_{(K)} - 2\pi \cdot 1 \Rightarrow \pi t_{(K)} = 2\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{t_{(K)} = 2\,s}$$

Για το σημείο Λ θα χρησιμοποιήσουμε την ταχύτητα του κύματος:

$$u = \lambda f \Rightarrow$$

$$\boxed{u = 0,5\,\frac{m}{s}}$$

Επειδή:

$$u = \frac{x}{t} = \text{σταθ.}$$

με αντικατάσταση έχουμε:

$$u = \frac{x}{t} \Rightarrow 0,5 = \frac{1,5}{t_{(\Lambda)}} \Rightarrow$$

$$\boxed{t_{(\Lambda)} = 3\,s}$$

δ) Για τον υπολογισμό της διαφοράς φάσης των σημείων Κ, Λ την ίδια χρονικά στιγμή, εργαζόμαστε ως εξής:

Οι φάσεις των Κ, Λ ως προς το χρόνο δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\phi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

$$\phi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη, έχουμε:

$$\phi_K - \phi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) = 2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_K}{\lambda} - 2\pi\frac{t}{T} + 2\pi\frac{x_\Lambda}{\lambda} =$$

$$= -2\pi\frac{x_K}{\lambda} + 2\pi\frac{x_\Lambda}{\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda}\left(x_K - x_\Lambda\right)$$

Επομένως:

$$\phi_K - \phi_\Lambda = -\frac{2\pi}{\lambda}(1m - 1,5m) \Rightarrow$$

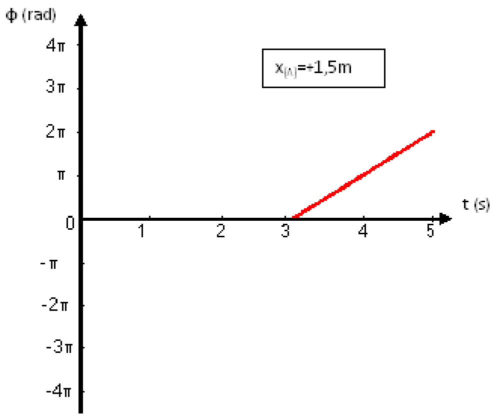
$$\boxed{\phi_K - \phi_\Lambda = +\pi \text{ rad}}$$

ε) Για τη χάραξη της γραφικής παράστασης $\phi = f(t)$ για το σημείο Λ, θέτουμε x=1,5 m στην εξίσωση της φάσης:

$$\phi = \pi t - 2\pi x \Rightarrow$$

$\boxed{\phi = \pi t - 3\pi \ \text{(S. I.)}}$ με $t \geq 3s$

Η εξίσωση που προκύπτει είναι πρώτου βαθμού ως προς t, η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται στο σχήμα:

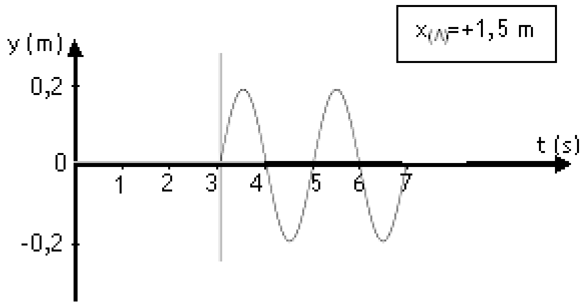


στ) Για τη χάραξη της γραφικής παράστασης $y = f(t)$ για το σημείο Λ, θέτουμε $x = 1,5\,m$ στην εξίσωση κύματος:

$$y = 0,2\eta\mu\left(\pi t - 2\pi x\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{y = 0,2\eta\mu\left(\pi t - 3\pi\right) \ \text{(S. I.)}}$$

Η εξίσωση που προκύπτει είναι αρμονική συνάρτηση από τη στιγμή $t = 3\,s$ και έπειτα. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα:



ζ) Για την εύρεση της φοράς κίνησης του σημείου Λ θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$u = 0,2\pi\sigma\upsilon\nu\left(\pi t - 2\pi x\right)$ (S. I.)

της ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου, από το ερώτημα β).
Θέτουμε στην εξίσωση $x = 1,5\,m$ και $t = 4\,s$:

$$u = 0,2\pi\sigma\upsilon\nu\left(\pi t - 2\pi x\right) \Rightarrow u = 0,2\pi\sigma\upsilon\nu\left(4\pi - 3\pi\right) \Rightarrow u = 0,2\pi\sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{u = -0,2\pi\,\frac{m}{s}}$$

η) Για $t_2 = 8\,s$, η εξίσωση κύματος παίρνει τη μορφή

$$y = 0,2\eta\mu\left(\pi t - 2\pi x\right) \Rightarrow$$

$\boxed{y = 0,2\eta\mu\left(8\pi - 2\pi x\right)}$ (S. I.)

Πρόκειται να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης.

Για να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή $t_2 = 8\,s$, πρέπει αρχικά να βρούμε μέχρι ποιο σημείο x_2 της χορδής θα έχει διαδοθεί το κύμα εκείνη τη στιγμή.

Θέτουμε $t_2 = 8\,s$ στην εξίσωση $u = \frac{x}{t}$ και έχουμε:

$$u = \frac{x}{t} \Rightarrow 0,5 = \frac{x_2}{8} \Rightarrow x_2 = +4\,m$$

Υπολογίζουμε την απομάκρυνση της πηγής του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 8\,s$:

$$y = 0,2\eta\mu\left(\pi t - 2\pi x\right) \Rightarrow y = 0,2\eta\mu\left(4\pi\right)m \Rightarrow y = 0$$

Υπολογίζουμε την απομάκρυνση του σημείου που απέχει $\lambda/4$ από την πηγή, τη χρονική στιγμή $t_2 = 8\,s$:

$$y = 0,2\eta\mu\left(\pi t - 2\pi x\right) \Rightarrow y = 0,2\eta\mu\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -0,2\ \mathrm{m}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία υπολογίζουμε, για τη χρονική στιγμή $t_2 = 8\,s$, την απομάκρυνση του σημείου που απέχει $2\lambda/4$ από την πηγή, την απομάκρυνση του σημείου που απέχει $3\lambda/4$ από την πηγή, την απομάκρυνση του σημείου που απέχει λ από την πηγή και προχωρώντας ανά $\lambda/4$, την απομάκρυνση των υπολοίπων σημείων μέχρι τη θέση x_2.

Ενώνουμε τα σημεία με μια συνεχή αρμονική καμπύλη για να ολοκληρώσουμε την κατασκευή του στιγμιότυπου.