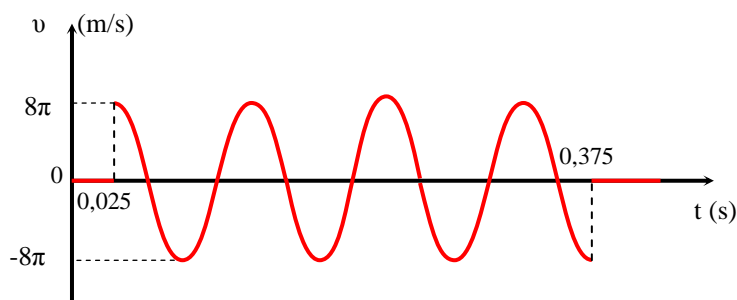


## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤΗ ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

Δύο σύγχρονες πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  που απέχουν απόσταση  $d=8\text{m}$ , παράγουν στην επιφάνεια ενός υγρού αρμονικά κύματα που έχουν ταχύτητα διάδοσης  $v=20\text{m/s}$ . Η εξίσωση της απομάκρυνσης των πηγών σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση  $y=0,4\mu\text{m}20\pi t$  (S.I.).

1. Σε ένα σημείο  $\Sigma$  της επιφάνειας του υγρού που απέχει απόσταση  $r_1=4\text{m}$  από την πηγή  $\Pi_1$  και απόσταση  $r_2$  από την πηγή  $\Pi_2$  με  $r_2 > r_1$ , τα δύο κύματα φτάνουν με χρονική καθυστέρηση  $\Delta t=0,2\text{s}$ .
  - α) Να διερευνήσετε αν στο σημείο  $\Sigma$  έχουμε ενισχυτική ή αποσβεστική συμβολή.
  - β) Να βρεθεί η απόσταση  $r_2$ .
  - γ) Να βρεθεί η υπερβολή ενίσχυσης ή απόσβεσης στην οποία βρίσκεται το σημείο  $\Sigma$ .
  - δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου  $\Sigma$  σε συνάρτηση με το χρόνο για  $t \geq 0$ .
  - ε) Να υπολογίσετε την ταχύτητα ταλάντωσης του  $\Sigma$  τη χρονική στιγμή  $t=0,45\text{s}$ .
  - ζ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το υλικό σημείο  $\Sigma$  σε συνάρτηση με το χρόνο για  $t \geq 0$  αν θεωρήσουμε ότι η στοιχειώδης μάζα του υλικού σημείου  $\Sigma$  είναι  $m=5 \cdot 10^{-3}\text{Kg}$ .
  - η) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης του σημείου  $\Sigma$  σε συνάρτηση με το χρόνο για  $t \geq 0$ .
2. Για ένα σημείο  $P$  που βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα  $\Pi_1\Pi_2$  και απέχει  $x_1$  και  $x_2$  ( $x_1 > x_2$ ) από τις πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αντίστοιχα, η γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσής του σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- α) Να διερευνήσετε αν στο σημείο  $P$  έχουμε ενισχυτική ή αποσβεστική συμβολή.
  - β) Να βρεθούν οι αποστάσεις  $x_1$  και  $x_2$ . Σε ποια υπερβολή ενίσχυσης ή απόσβεσης βρίσκεται το σημείο  $P$ ;
  - γ) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης του σημείου  $P$  σε συνάρτηση με το χρόνο, για κάθε κύμα ξεχωριστά. Ποια αρχή επιβεβαιώνεται από τις γραφικές παραστάσεις;
3. Να βρείτε ποια σημεία μεταξύ των  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  ταλαντώνονται με ενέργεια ταλάντωσης ίση με την ενέργεια ταλάντωσης του σημείου  $\Sigma$  και ποια σημεία μεταξύ των  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  ταλαντώνονται με ενέργεια ταλάντωσης ίση με την ενέργεια ταλάντωσης του σημείου  $P$  αν θεωρήσουμε ότι όλα τα υλικά σημεία μεταξύ των πηγών έχουν την ίδια στοιχειώδη μάζα με το  $\Sigma$ .
4. Να σχεδιάσετε τις υπερβολές ενίσχυσης και απόσβεσης μεταξύ των πηγών  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ .
5. Να βρείτε τη διαφορά των αποστάσεων από τις δύο πηγές για ένα σημείο  $\Lambda$  που ανήκει στην 2<sup>η</sup> υπερβολή αποσβεστικής συμβολής δεξιά της μεσοκαθέτου του  $\Pi_1\Pi_2$ .
6. Ένα σημείο  $K$  της επιφάνειας του υγρού που ανήκει στην 5<sup>η</sup> υπερβολή ενισχυτικής συμβολής δεξιά της υπερβολής του  $\Sigma$ , μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό ταλαντώνεται με εξίσωση  $y=0,8\mu\text{m}(20\pi t-5\pi)$  (S.I.). Να βρείτε τις αποστάσεις  $d_1$  και  $d_2$  του σημείου  $K$  από τις πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ . Δίνεται:  $\pi^2=10$ .

## Απάντηση:

1. Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών  $y=A\eta\mu\omega t$  και τη δοθείσα έχω:  $A=0,4\text{m}$ ,  $\omega=20\pi\text{ rad/s}$  οπότε  $T=2\pi/\omega \rightarrow T=0,1\text{s}$ ,  $f=10\text{ hz}$  και  $v=\lambda f$  ή  $\lambda=v/f$  ή  $\lambda=20/10$  ή  $\lambda=2\text{m}$ .

α) Μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο  $\Sigma$  αυτό ταλαντώνεται με πλάτος  $|A'_{\Sigma}| = 2A|\sin 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda}| \rightarrow |A'_{\Sigma}| = 2A|\sin 2\pi \frac{vt_1 - vt_2}{2\lambda}| \rightarrow |A'_{\Sigma}| = 2A|\sin \pi \frac{v}{\lambda}(t_1 - t_2)| \rightarrow |A'_{\Sigma}| = 2A|\sin \pi \Delta t| \rightarrow |A'_{\Sigma}| = 2A|\sin \pi \cdot 10 \cdot 0,2| \rightarrow |A'_{\Sigma}| = 2A|\sin 2\pi| \rightarrow |A'_{\Sigma}| = 2A$  άρα στο  $\Sigma$  έχουμε ενισχυτική συμβολή.

β) Το κύμα της πηγής  $\Pi_1$  φτάνει στο  $\Sigma$  την  $t_1 = \frac{r_1}{v} = \frac{4}{20} \rightarrow t_1 = 0,2\text{s}$  ενώ το κύμα της  $\Pi_2$  φτάνει στο  $\Sigma$  την  $t_2 = t_1 + \Delta t = 0,2 + 0,2 \rightarrow t_2 = 0,4\text{s}$  αφού  $r_2 > r_1$ . Άρα  $r_2 = vt_2 \rightarrow r_2 = 20 \cdot 0,4 \rightarrow r_2 = 8\text{m}$ .

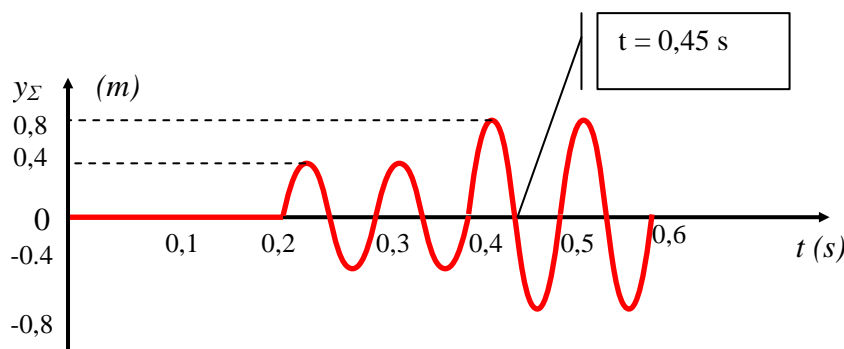
γ) Αφού στο  $\Sigma$  έχουμε ενισχυτική συμβολή ισχύει  $r_1 - r_2 = N\lambda \rightarrow 4 - 8 = N \cdot 2 \rightarrow -4 = N \cdot 2 \rightarrow N = -2$ . Δηλαδή το  $\Sigma$  ανήκει στη δεύτερη υπερβολή ενίσχυσης αριστερά της μεσοκαθέτου του  $\Pi_1\Pi_2$ .

δ) Για  $0 \leq t < 0,2\text{ s}$   $y_{\Sigma} = 0$  (1) αφού κανένα κύμα δεν έχει φτάσει στο  $\Sigma$ .

Για  $0,2 \leq t < 0,4\text{ s}$  έχω:  $y_{\Sigma} = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}) \rightarrow y_{\Sigma} = 0,4\eta\mu 2\pi(10t - 2)$  (S.I.) (2) αφού το  $\Sigma$  ταλαντώνεται λόγω του κύματος της  $\Pi_1$ .

Για  $t \geq 0,4\text{ s}$  έχω:  $y_{\Sigma} = 2A \sin 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}) \rightarrow y_{\Sigma} = 0,8\eta\mu 2\pi(10t - 3)$  (S.I.) (3)

αφού στο  $\Sigma$  τώρα έχουν φτάσει και τα δύο κύματα. Οπότε η γραφική παράσταση της  $y_{\Sigma} = f(t)$  είναι η παρακάτω:



ε) 1<sup>ος</sup> Τρόπος: Τη χρονική στιγμή  $t = 0,45\text{ s}$  στο  $\Sigma$  έχουμε συμβολή, άρα ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση (3) οπότε  $v_{\Sigma} = \omega(+A'_{\Sigma})\sin 2\pi(10t - 3)$  και αντικαθιστώντας έχουμε:  
 $v_{\Sigma} = 20\pi \cdot 0,8 \sin(20\pi \cdot 0,45 - 6\pi) \rightarrow v_{\Sigma} = 16\pi \sin(9\pi - 6\pi) \rightarrow v_{\Sigma} = 16\pi \sin(3\pi) \rightarrow v_{\Sigma} = -16\pi\text{ m/s}$ .

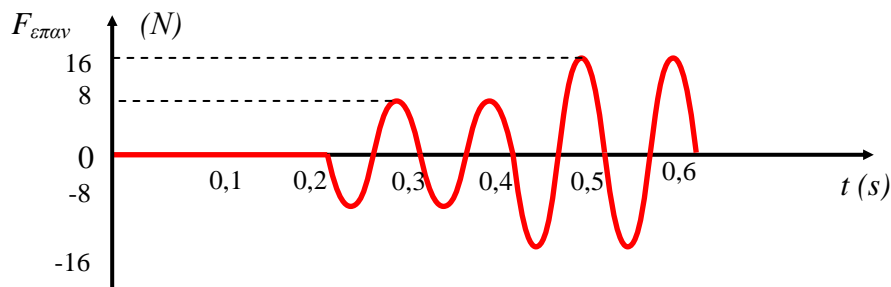
2<sup>ος</sup> Τρόπος: Τη χρονική στιγμή  $t = 0,45\text{ s}$  το σημείο  $\Sigma$  βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του κινούμενου προς τα αρνητικά, όπως προκύπτει από την προηγούμενη γραφική παράσταση άρα  $v_{\Sigma} = -v_{\max(\Sigma)} = -\omega|A'_{\Sigma}| = -20\pi \cdot 0,8 \rightarrow v_{\Sigma} = -16\pi\text{ m/s}$ .

ζ) Για τη δύναμη επαναφοράς ισχύει:  $F_{\text{επαν}} = -m\omega^2 y_{\Sigma} \rightarrow F_{\text{επαν}} = -5 \cdot 10^{-3} \cdot 20^2 \cdot \pi^2 y_{\Sigma} \rightarrow F_{\text{επαν}} = -20 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{+3} y_{\Sigma} \rightarrow F_{\text{επαν}} = -20 y_{\Sigma}$  οπότε από τις σχέσεις (1), (2), (3) του ερωτήματος δ έχω:

Για  $0 \leq t < 0,2 \text{ s}$   $F_{\text{επαν}} = 0$  αφού κανένα κύμα δεν έχει φτάσει στο Σ.

Για  $0,2 \leq t < 0,4 \text{ s}$   $F_{\text{επαν}} = -8\eta\mu 2\pi(10t - 2)$  (S.I.)

Για  $t \geq 0,4 \text{ s}$   $F_{\text{επαν}} = -16\eta\mu 2\pi(10t - 3)$  (S.I.) και η αντίστοιχη γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

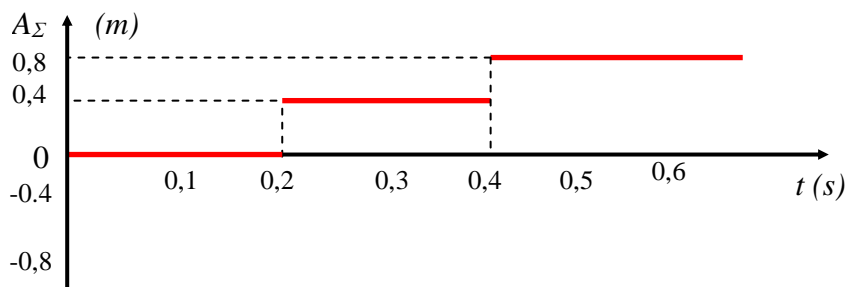


η) Για το πλάτος ταλάντωσης του Σ έχω:

Για  $0 \leq t < 0,2 \text{ s}$   $A_{\Sigma} = 0$

Για  $0,2 \leq t < 0,4 \text{ s}$   $A_{\Sigma} = 0,4\text{m}$

Για  $t \geq 0,4 \text{ s}$   $A_{\Sigma} = 0,8\text{m}$



2. α) Από τη γραφική παράσταση ταχύτητας χρόνου παρατηρούμε ότι μετά τη χρονική στιγμή  $t_2 = 0,375 \text{ s}$  το σημείο P δεν ταλαντώνεται, άρα το σημείο P είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής.

β) Από τη γραφική παράσταση ταχύτητας χρόνου παρατηρούμε ότι το κύμα της πιο κοντινής πηγής  $\Pi_2$  ( $x_2 < x_1$ ) φτάνει στο P την  $t_1 = 0,025 \text{ s}$  άρα  $x_2 = vt_1$  ή  $x_2 = 20 \cdot 0,025$  ή  $x_2 = 0,5\text{m}$ .

Από τη γραφική παράσταση ταχύτητας χρόνου παρατηρούμε ότι το κύμα της πιο μακρινής πηγής  $\Pi_1$  ( $x_2 < x_1$ ) φτάνει στο P την  $t_2 = 0,375 \text{ s}$  άρα  $x_1 = vt_2$  ή  $x_1 = 20 \cdot 0,375$  ή  $x_1 = 7,5\text{m}$ .

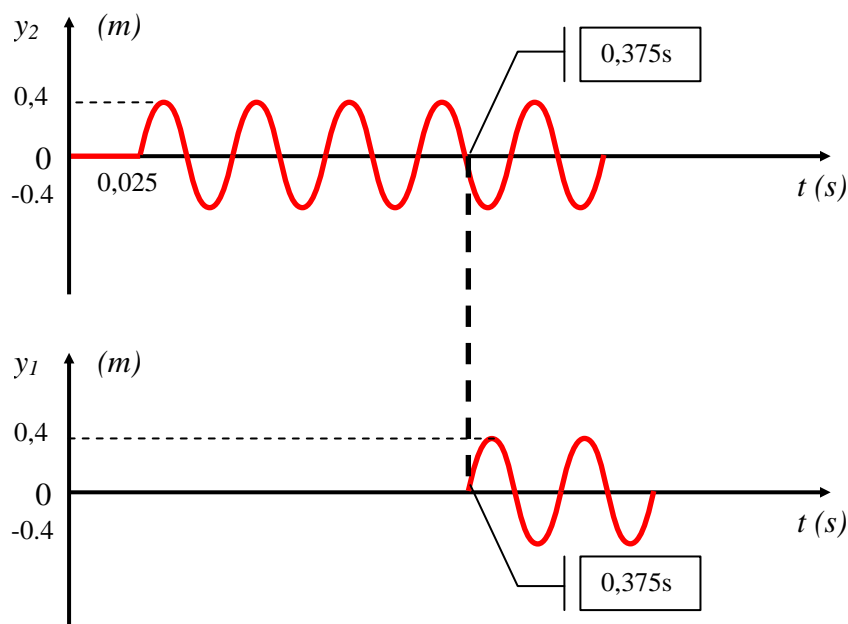
Αφού το P είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής έχω:  $x_1 - x_2 = (2N+1)\lambda/2$  άρα  $7,5 - 0,5 = (2N+1) \cdot 1$  άρα  $7 = 2N+1 \rightarrow N = 3$ , άρα το σημείο P είναι σημείο της τέταρτης!!! υπερβολής αποσβεστικής συμβολής δεξιά της μεσοκαθέτου του  $\Pi_1\Pi_2$ . ( $N = 0, 1, 2, 3$ ).

γ) Το κύμα της  $\Pi_2$  για το P δίνει  $y_2 = A\eta\mu 2\pi(t/T - x_2/\lambda)$  άρα  $y_2 = 0,4\eta\mu 2\pi(10t - 0,5/2)$  άρα

$y_2 = 0,4\eta\mu(20\pi t - 0,5\pi)$  για  $t \geq 0,025 \text{ s}$ .

Το κύμα της  $\Pi_1$  για το P δίνει  $y_1 = A\eta\mu 2\pi(t/T - x_1/\lambda)$  άρα  $y_1 = 0,4\eta\mu 2\pi(10t - 7,5/2)$  άρα

$y_1 = 0,4\eta\mu(20\pi t - 7,5\pi)$  για  $t \geq 0,375$  s. Με τις εξής γραφικές παραστάσεις:



(Παρατηρείστε ότι σε χρόνο  $\Delta t = 0,375 - 0,025 = 0,35$  s  $= 0,3 + 0,05 = 3T + T/2$  το σημείο P έχει εκτελέσει 3,5 ταλαντώσεις).

Παρατηρούμε ότι επιβεβαιώνεται η αρχή της επαλληλίας. Ειδικά μετά την  $t = 0,375$  s όταν λόγω του κύματος της  $\Pi_1$  το σημείο P είναι στη θέση +A, λόγω του κύματος της  $\Pi_2$  είναι στη θέση -A οπότε μετά την  $t = 0,375$  s,  $y_1 = -y_2$  άρα  $y_1 + y_2 = 0$ . Άρα αποσβεστική συμβολή.

3. Ίδια ενέργεια ταλάντωσης με το Σ έχουν τα σημεία του  $\Pi_1\Pi_2$  που ταλαντώνονται με πλάτος  $2A$  αφού έχουν την ίδια μάζα με το Σ. Δηλαδή ζητούνται τα σημεία ενισχυτικής συμβολής. Για τα σημεία ενισχυτικής συμβολής του  $\Pi_1\Pi_2$  έχω:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 - r_2 = N\lambda \\ r_1 + r_2 = d \end{array} \right\} \quad 2r_1 = N\lambda + d \rightarrow 2r_1 = N \cdot 2 + 8 \rightarrow r_1 = N + 4.$$

Όμως  $0 < N + 4 < 8 \rightarrow -4 < N < 4$  άρα  $N = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

Δηλαδή έχουμε 7 σημεία ενισχυτικής συμβολής μεταξύ των  $\Pi_1\Pi_2$  στις θέσεις:

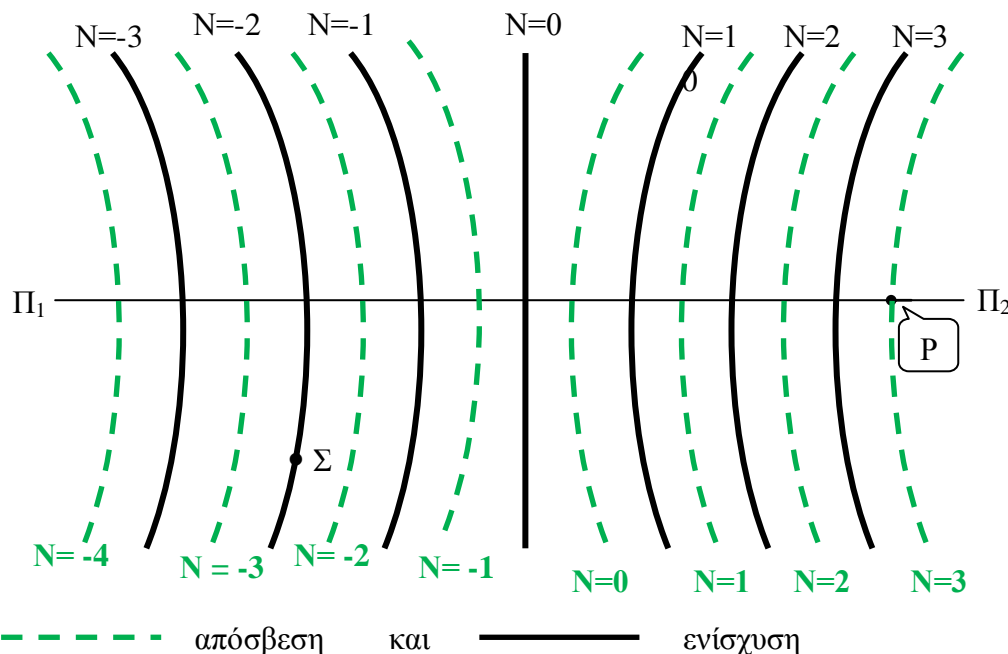
Για  $N = -3$   $r_1 = 1$  m, για  $N = -2$   $r_1 = 2$  m, για  $N = -1$   $r_1 = 3$  m, για  $N = 0$   $r_1 = 4$  m, για  $N = 1$   $r_1 = 5$  m, για  $N = 2$   $r_1 = 6$  m, για  $N = 3$   $r_1 = 7$  m.

Ίδια ενέργεια ταλάντωσης με το P έχουν τα σημεία του  $\Pi_1\Pi_2$  που ταλαντώνονται με πλάτος 0 αφού έχουν την ίδια μάζα με το P. Για τα σημεία αποσβεστικής συμβολής του  $\Pi_1\Pi_2$  έχω:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 - r_2 = (2N+1)\lambda/2 \\ r_1 + r_2 = d \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{άρα } 2r_1 = (2N+1)\lambda/2 + d \rightarrow r_1 = (2N+1)1/2 + 4. \\ \text{Όμως } 0 < (2N+1)1/2 + 4 < 8 \rightarrow -4 < (2N+1)1/2 < 4 \rightarrow -8 < 2N+1 < 8 \\ \rightarrow -9 < 2N < 7 \rightarrow -4,5 < N < 3,5 \text{ άρα } N = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. \end{array}$$

Δηλαδή έχουμε 8 σημεία αποσβεστικής συμβολής (μαζί με το P) μεταξύ των  $\Pi_1\Pi_2$  στις θέσεις: Για  $N=-4$   $r_1=0,5m$ , για  $N=-3$   $r_1=1,5m$ , για  $N=-2$   $r_1=2,5m$ , για  $N=-1$   $r_1=3,5m$ , για  $N=0$   $r_1=4,5m$ , για  $N=1$   $r_1=5,5m$ , για  $N=2$   $r_1=6,5m$  και για  $N=3$   $r_1=7,5m$  (Σημείο P). Άρα **άλλα 7 σημεία μεταξύ των  $\Pi_1\Pi_2$**  έχουν ενέργεια ταλάντωσης ίση με την ενέργεια ταλάντωσης του σημείου P.

4. Επομένως οι αντίστοιχες υπερβολές φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



5. Το σημείο Λ που ανήκει στη **2<sup>η</sup>** υπερβολή αποσβεστικής συμβολής αντιστοιχεί στο **N=1** άρα  $x_1 - x_2 = (2N+1)\lambda/2 \rightarrow x_1 - x_2 = (2+1)2/2 \rightarrow$   **$x_1 - x_2 = 3m$** .

6. Βρήκαμε στο ερώτημα 1γ ότι το σημείο Σ ανήκει στην υπερβολή ενισχυτικής συμβολής με  $N= -2$  επομένως το σημείο Κ αφού είναι στην 5<sup>η</sup> υπερβολή δεξιά του Σ θα έχει **N=3** άρα:

$$d_1 - d_2 = 3\lambda \rightarrow \mathbf{d_1 - d_2 = 6m} \quad (4).$$

Από την εκφώνηση για την ταλάντωση του Κ έχω:  $y_K = 0,8\eta\mu(20\pi t - 5\pi)$  (5) (S.I.)

$$\text{όμως } y_K = 2A\sigma\upsilon\nu\pi \frac{d_1 - d_2}{\lambda} \eta\mu 2\pi(10t - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}) \text{ ή } y_K = 2A\sigma\upsilon\nu(3\pi)\eta\mu 2\pi(10t - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}) \text{ ή}$$

$$y_K = -0,8\eta\mu(20\pi t - 2\pi \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}) \text{ ή } \mathbf{y_K = 0,8\eta\mu(20\pi t - \pi \frac{d_1 + d_2}{\lambda} + \pi)}$$
 (6)

$$\text{δύο σχέσεις (5) και (6) έχω: } -\pi \frac{d_1 + d_2}{\lambda} + \pi = -5\pi \rightarrow \pi \frac{d_1 + d_2}{\lambda} = 5\pi + \pi \rightarrow \mathbf{d_1 + d_2 = 12 m}$$
 (7).

Λύνοντας το σύστημα των (4) και (7) έχω  **$d_1 = 9m$**  και  **$d_2 = 3m$** .