ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

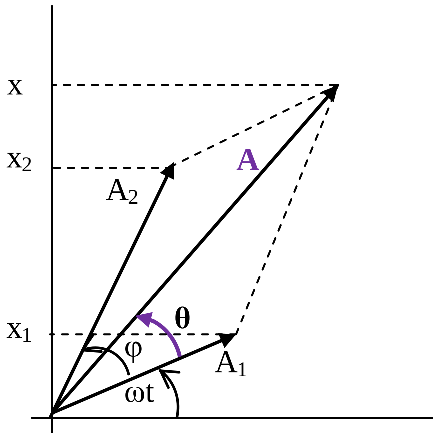
1. Σύνθεση δυο α.α.τ με την ίδια συχνότητα

$x_1 = A_1 ημ(ωt)$
$x_2 = A_2 ημ(ωt+φ)$

Η εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθεσης των δυο ταλαντώσεων είναι:

$x = Aημ(ωt+θ)$

Όπου $\boxed{\boldsymbol{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ}}}$



$$\boxed{\boldsymbol{εφθ = \frac{A_2 ημφ}{A_1 + A_2 συνφ}}}$$

Προσέχουμε ποια από τις δύο ταλαντώσεις που συντίθενται έχει τη μεγαλύτερη φάση γιατί η σύνθετη ταλάντωση προηγείται κατά θ της ταλάντωσης με τη μικρότερη φάση.
Δηλαδή αν $x_1 = A_1 ημ(ωt+φ_{01})$ και $x_2 = A_2 ημ(ωt+φ_{02})$ με $φ_{02} > φ_{01}$ τότε $φ = φ_{02} - φ_{01}$ και για τη συνισταμένη ταλάντωση έχουμε: $x = Aημ(ωt + φ_{01} + θ)$

2.

● Οι **στιγμιαίες τιμές** απομάκρυνσης , ταχύτητας και επιτάχυνσης προστίθενται **αλγεβρικά**, δηλαδή:

1η ταλάντωση	2η ταλάντωση	Σύνθετη ταλάντωση
x_1	x_2	$x = x_1 + x_2$
$υ_1$	$υ_2$	$υ = υ_1 + υ_2$
$α_1$	$α_2$	$α = α_1 + α_2$

● Τα **πλάτη** των παραπάνω προστίθενται **διανυσματικά**

1η ταλάντωση	2η ταλάντωση	Σύνθετη ταλάντωση
A_1	A_2	$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ}$
$υ_{01}$	$υ_{02}$	$υ_0 = \sqrt{υ_{01}^2 + υ_{02}^2 + 2υ_{01}υ_{02}συνφ}$
$α_{01}$	$α_{02}$	$α_0 = \sqrt{α_{01}^2 + α_{02}^2 + 2α_{01}α_{02}συνφ}$

3. Ενέργεια κατά την σύνθεση ταλαντώσεων

● Η σταθερά επαναφοράς D δίνεται από τη σχέση $D = m\omega^2$ και είναι ίδια για κάθε συνιστώσα ταλάντωση κα για τη σύνθετη.

$E_1 = \frac{1}{2}DA_1^2$ η ολική ενέργεια, αν το σώμα εκτελούσε μόνο του την πρώτη ταλάντωση

$E_2 = \frac{1}{2}DA_2^2$ η ολική ενέργεια, αν το σώμα εκτελούσε μόνο του την δεύτερη ταλάντωση

$E = \frac{1}{2}DA^2$ η ολική ενέργεια, της σύνθετης ταλάντωσης.

● Κατά την σύνθεση ταλαντώσεων δεν ισχύει γενικά ότι η ολική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με το άθροισμα των ενεργειών των δυο ταλαντώσεων. Άρα δεν έχει νόημα να μιλάμε για την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

▶ Έστω E_1 είναι η ενέργεια που θα είχε το σώμα λόγω της πρώτης ταλάντωσης και E_2 είναι η ενέργεια που θα είχε το σώμα λόγω της δεύτερης ταλάντωσης. Αν οι δύο ταλαντώσεις έχουν διαφορά φάσης φ, τότε η ολική ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης θα είναι:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}D(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{1}{2}DA_1^2 + \frac{1}{2}DA_2^2 + DA_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\Rightarrow E = E_1 + E_2 + DA_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi \quad (1)$$

Όμως $E_1 = \frac{1}{2}DA_1^2 \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{D}}$ (2) και $E_2 = \frac{1}{2}DA_2^2 \Rightarrow A_2 = \sqrt{\frac{2E_2}{D}}$ (3)

οπότε η σχέση (1) λόγω της (2) και της (3) γράφεται:

$$E = E_1 + E_2 + \sqrt{4E_1E_2}\sigma\upsilon\nu\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1E_2}\sigma\upsilon\nu\varphi}}$$

▶ Παρατηρούμε ότι η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης εξαρτάται όχι μόνο από ην ολική ενέργεια λόγω της κάθε ταλάντωσης, αλλά και από την διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων.

▶ Αν η διαφορά φάσεις είναι φ = π/2 ή φ = 90° τότε μόνο ισχύει $E = E_1 + E_2$

4. **Σύνθεση δυο α.α.τ με διαφορετικές συχνότητες**

Εξίσωση 1ης Ταλάντωσης: x_1= Αημω_1t

Εξίσωση 2ης Ταλάντωσης: x_2 = Αημω_2t

Αρχή της Επαλληλίας: $x = x_1+x_2 = A\eta\mu\omega_1 t + A\eta\mu\omega_2 t = \ldots$ *με λίγες πράξεις παίρνουμε τελικά την εξίσωση της περιοδικής κίνησης.*

$$\boxed{x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)} \quad (1)$$

Όταν έχουμε σύνθεση δύο α.α.τ που η διαφορά των συχνοτήτων είναι αρκετά μικρή σε σχέση με το άθροισμά τους, προκύπτουν **διακροτήματα**.

Έτσι αν $\boldsymbol{\omega_1 \cong \omega_2}$ και $\bar{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ από την (1) έχω $x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\eta\mu\bar{\omega}t$ ή

$$x = A'\eta\mu\bar{\omega}t \quad \text{με} \quad A' = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$$

όπου το $\boldsymbol{A'}$ ονομάζεται **διαμορφωμένο πλάτος** ή διακρότημα.

Τότε η εξίσωση της σύνθετης κίνησης γίνεται: $x = A'\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$ ή

$$\boxed{\boldsymbol{x = \underbrace{2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)}_{\delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{o}\tau\eta\mu\alpha}\cdot\underbrace{\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)}_{\sigma\acute{\upsilon}\nu\theta\varepsilon\tau\eta\ \kappa\acute{\iota}\nu\eta\sigma\eta}}}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

● Η περίοδος του διακροτήματος είναι ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης και βρίσκεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{T_\delta} = \frac{2\pi}{\omega_\delta} = \frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{|f_1-f_2|}} = \frac{1}{\left|\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right|} = \frac{\boldsymbol{T_1T_2}}{\boldsymbol{|T_1-T_2|}}$$

● Η περίοδος της συνισταμένης ταλάντωσης βρίσκεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1+\omega_2} = \frac{4\pi}{2\pi(f_1+f_2)} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{f_1+f_2}}$$

5. Ο αριθμός Ν των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους είναι:

$$N = \frac{T_\delta}{T} = \frac{f_1+f_2}{2|f_1-f_2|}$$

6. Σε ένα διακρότημα με συχνότητα $f_\delta = |f_1-f_2|$, μπορούμε να αυξήσουμε τη μικρότερη από τις συχνότητες ή να μειώσουμε την μεγαλύτερη έτσι ώστε να μην αλλάξει η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους με αποτέλεσμα να μην αλλάξει η συχνότητα του διακροτήματος.