**Σχολικό έτος 2011-2012**
**Τάξη: A**

**Θέματα Γραπτών Προαγωγικών Εξετάσεων**
**Περιόδου Μαΐου – Ιουνίου 2012 στο μάθημα:**

# ΑΛΓΕΒΡΑ

**Θέμα 1ο**

**Α. Α1.** Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta$,να αποδείξετε ότι: $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$. **Μον.5**

**Α2.** Να συμπληρώσετε τις σχέσεις: **i.** $\beta \neq 0, \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = --$ **ii.** $|\alpha + \beta| \leq ---$ **Μον.2Χ2=4**

**Β. Β1.** Πότε μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος;

**Β2.** Πότε μια εξίσωση 2ου βαθμού δεν έχει πραγματικές ρίζες;

**Μον.3Χ2=6**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε στο γραπτό σας με Σωστό ή Λάθος κάθε ένα από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

**α.** Αν $\rho \neq 0$ ,τότε: $|\chi| > |\rho| \Leftrightarrow \chi < -|\rho|$ ή $\chi > |\rho|$.

**β.** Αν $\alpha > 0$,$\mu$ ακέραιος και $\nu$ θετικός ακέραιος,τότε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$.

**γ.** Αν η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες $\chi_1, \chi_2$ ,τότε: $\chi_1 + \chi_2 = -\frac{\alpha}{\beta}$

**δ.** Αν $\alpha \geq 0$ και $\mu, \nu$ θετικοί ακέραιοι με $\mu, \nu \geq 2$ τότε: $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$

**ε.** Σε ένα ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα σημεία $A(\alpha, \beta), B(|-\alpha|, -|\beta|)$ όταν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $\psi'\psi$.

**Μον.2Χ5 =10**

**Θέμα 2ο**

**α.** Θεωρούμε την εξίσωση την εξίσωση $|2\chi - 1| - 3 = 0$ (1).

**i.** Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση. **Μον.6**

**ii.** Σε μία αριθμητική πρόοδο $(\alpha_\nu)$ ο όρος της $\alpha_5$ είναι η θετική ρίζα της (1) και η διαφορά $\omega$ της αριθμητικής προόδου είναι η δεύτερη ρίζα της (1).Να βρείτε τον $\alpha_{10}$. **Μον.6**

**β.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi^2 - 5\chi + 6}{|2\chi - 1| - 3}$

**i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f$. **Μον.6**

**ii.** Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της $f$ έχει με τον άξονα $\chi'\chi$ ένα μόνο κοινό σημείο το οποίο να βρείτε. **Μον.7**

**Θέμα 3ο**

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(\chi) = -\chi^2 + \chi + \frac{\lambda^2 + 5}{\lambda + 1}, \lambda \neq -1$

**α.** Να βρείτε τις τιμές του $\lambda$ για τις οποίες είναι $(\lambda + 1)f(0) \leq 2\lambda + 8$. **Μον.13**

**β.** Αν $\lambda = -2$,τότε: **i.** Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(\chi)$. **Μον.5**

**ii.** Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $f(1), f(2)$. **Μον.7**

**Θέμα 4ο**

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - [\kappa^2 - 2\kappa + 1 + (\lambda + 1)^2]\chi - 2 = 0$ (1),$\kappa, \lambda \in R$.

**α.** Δείξτε ότι για οποιαδήποτε $\kappa, \lambda \in R$ η (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. **Mov.4**

**β.** Αν η (1) έχει ρίζες αντίθετες να βρείτε τα $\kappa, \lambda$. **Mov.7**

**γ.** Αν $\kappa = 1, \lambda = -1$ και $\chi_1$ η θετική ρίζα της (1),τότε:

**i.** Δείξτε ότι: $\sqrt[3]{2\chi_1} = \sqrt{2}$. **Mov.7**

**ii.** Να λύσετε την ανίσωση $2|3\chi - 1| < {\chi_1}^2 + |1 - 3\chi|$. **Mov.7**

# Ε Ν Δ Ε Ι Κ Τ Ι Κ Ε Σ  Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

**Θέμα 1ο**

**Γ. α** . Σωστό

**β.** Λάθος

**γ.** Λάθος

**δ.** Σωστό

**ε.** Σωστό

**Θέμα 2ο**

**α. i.** $|2\chi-1|-3=0 \Leftrightarrow |2\chi-1|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi-1=-3 \Leftrightarrow \chi=-1 \\ \text{ή} \\ 2\chi-1=3 \Leftrightarrow \chi=2 \end{cases}$.

**ii.** Έχουμε $\alpha_5=2$ και $\omega=-1$.

$\alpha_5=\alpha_1+4\omega \Leftrightarrow 2=\alpha_1-4 \Leftrightarrow \alpha_1=6$.

$\alpha_{10}=\alpha_1+9\omega=6-9=-3$.

**β. i.** Πρέπει $|2\chi-1|\neq 3$.Με βάση το α) είναι $\chi\neq -1$ και $\chi\neq 2$.Άρα $D_f=R-\{-1,2\}$.

**ii.** $f(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi^2-5\chi+6=0$.$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=25-24=1$.$\chi_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{5\pm1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\chi_1=2\\ \chi_2=3\end{cases}$.

Η τιμή $\chi_1=2$ απορρίπτεται γιατί δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.Άρα είναι $\chi=3$,οπότε η $C_f$ έχει με τον άξονα $\chi'\chi$ ένα μόνο κοινό σημείο το $K(3,0)$.

**Θέμα 3ο**

**α.** $(\lambda+1)f(0)\leq 2\lambda+8 \Leftrightarrow \lambda^2+5\leq 2\lambda+8 \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda-3\leq 0$.

Οι ρίζες του τριωνύμου $\lambda^2-2\lambda-3$ είναι $-1,3$.

| $\lambda$ | $-\infty$ | $-1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda^2-2\lambda-3$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων και δεδομένου ότι $\lambda\neq -1$ προκύπτει ότι $\lambda\in(-1,3]$.

**β.** Για $\lambda=-2$ το τριώνυμο γράφεται $f(\chi)=-\chi^2+\chi-9$.

**i.** Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1-36=-35<0$ και επειδή $\alpha=-1<0$ είναι $f(\chi)<0$ για κάθε $\chi\in R$.

**ii.** Έχουμε $f(1)=-9$ και $f(2)=-11$. $S=-9+(-11)=-20$ και $P=(-9)(-11)=99$.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $\chi^2-S\chi+P=0 \Leftrightarrow \chi^2+20\chi+99=0$.

**Θέμα 4ο**

Η (1) γράφεται $\chi^2 - [(\kappa-1)^2 + (\lambda+1)^2]\chi - 2 = 0$.

**α.** $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [(\kappa-1)^2 + (\lambda+1)^2]^2 + 8 > 0$.Άρα η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

**β.** Αφού η εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες πρέπει $S = -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2 + (\lambda+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa - 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$ και $\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$.

**γ.** Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -1$ η εξίσωση γίνεται $\chi^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \chi^2 = 2 \Leftrightarrow \chi = \pm\sqrt{2}$ .

Είναι $\chi_1 = \sqrt{2}$.

**i.** $\sqrt[3]{2\chi_1} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 2}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ **.**

**ii.** $2|3\chi - 1| - |1 - 3\chi| < {\chi_1}^2 \Leftrightarrow |3\chi - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < 3\chi - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < 3\chi < 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \chi < 1$.