Σχολικό έτος 2011-2012
Τάξη: B

Θέματα Γραπτών Προαγωγικών Εξετάσεων
Περιόδου Μαΐου – Ιουνίου 2012 στο μάθημα:

ΑΛΓΕΒΡΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: Αν $0<\alpha\neq 1, \theta>0$ και $\kappa\in R$ ισχύει: $log_\alpha\theta^\kappa=\kappa log_\alpha\theta$. **Μον.7**

Β. B$_1$. Να δώσετε τον ορισμό της αριθμητικής προόδου.Αν (α_ν) αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω να γράψετε με πόσο ισούται η παράσταση $\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}$. **Μον.(3+1)=4**

B$_2$. Αν (α_ν) μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda\neq 1$, να γράψετε τον τύπο του νιοστού όρου της καθώς και τον τύπο που δίνει το άθροισμα των πρώτων ν όρων της. **Μον.(2+2)=4**

Γ. Να χαρακτηρήσετε στο γραπτό σας με Σωστό ή Λάθος καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Η συνάρτηση $f(\chi)=\eta\mu\chi, \chi\in R$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

β. Κάθε σταθερό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν.

γ. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(\chi)=(\beta^2-\kappa)\chi^{2012}+\kappa\chi^2+1, g(\chi)=\alpha\gamma\chi^2+1$ με $\alpha,\beta,\gamma\in R^*$. Αν $P(\chi)=g(\chi)$,τότε οι αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

δ. Η συνάρτηση $f(\chi)=3^\chi.5^{-\chi}, \chi\in R$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ε. Αν $0<\alpha\neq 1$ και $\theta_1,\theta_2>0$,τότε είναι $\frac{log_\alpha\theta_1}{log_\alpha\theta_2}=log_\alpha\frac{\theta_1}{\theta_2}$

Μον.2Χ5=10

Θέμα 2ο

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^4+3\chi^2+2\chi+3+\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

α. i. Να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(\chi):(\chi^2+\chi+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. **Μον.6**

ii. Δείξτε ότι το $\chi+1$ δεν είναι παράγοντας του $P(\chi)$. **Μον.6**

β. i. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του α.i. ερωτήματος είναι $-\frac{1}{2}$ να βρείτε τις γωνίες α. **Μον.7**

ii. Αν $\alpha=\frac{\pi}{4}$,θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(\chi)=P(\chi)-\chi^4-\chi^3-\chi^2-3\chi-563$.
Να βρείτε τον αριθμό $Q(12)$.Τι εκφράζει η αριθμητική τιμή $Q(12)$. **Μον.(4+2)=6**

Θέμα 3ο

Σε μία αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1=2$ και ο τέταρτος όρος της είναι $\alpha_4=11$.

α. Δείξτε ότι η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι $\omega=3$ και ύστερα να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{2}\alpha_3\chi^3-3\chi-1=0$. **Μον.(4+8)=12**

β. Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{S_8}{25}\right)^{-\chi}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{\chi}+2=0$,όπου S_8 το άθροισμα των πρώτων οκτώ όρων της αριθμητικής προόδου που δίνεται στην υπόθεση. **Μον.13**

Θέμα 4ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi)=\chi+ln(e^{-\chi}-1)$.

α. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f. **Μον.5**

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln(\chi-1)+1+2+2^2+2^3+\cdots+2^9=2^{10}+f(-1)$ (1). **Μον.7**

β. Δείξτε ότι : **i.** $f(\chi)=\ln(1-e^\chi)$,για κάθε $\chi\in A$. **Μον.7**

ii. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $\chi'\chi$. **Μον.6**

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Α. Σχ.βιβλ. σελ.136..
Β. Σχ.βιβλ. σελ.94,103.
Γ. α. Σωστό.
β. Λάθος.
γ. Σωστό.
δ. Σωστό.
ε. Λάθος.

Θέμα 2ο

α. i.

$$\begin{array}{r|l} \chi^4+0\chi^3+3\chi^2+2\chi+3+\sigma\upsilon\nu2\alpha & \chi^2+\chi+1 \\ \cline{2-2} -\chi^4-\chi^3-\chi^2 \qquad\qquad\qquad\quad & \chi^2-\chi+3 \\ \hline -\chi^3+2\chi^2+2\chi+3+\sigma\upsilon\nu2\alpha & \\ \chi^3+\chi^2+\chi \qquad\qquad\quad & \\ \hline 3\chi^2+3\chi+3+\sigma\upsilon\nu2\alpha & \\ -3\chi^2-3\chi-3 \qquad\quad & \\ \hline \sigma\upsilon\nu2\alpha & \end{array}$$

Η ζητούμενη ταυτότητα της διαίρεσης είναι $P(\chi)=(\chi^2+\chi+1)(\chi^2-\chi+3)+\sigma\upsilon\nu2\alpha$.

ii. $P(-1)=5+\sigma\upsilon\nu2\alpha$.Αν το $\chi+1$ ήταν παράγοντας του $P(\chi)$,τότε το -1 θα είναι ρίζα του $P(\chi)$ δηλαδή $P(-1)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu2\alpha=-5$.Άτοπο αφού $-1\le\sigma\upsilon\nu2\alpha\le1$.Άρα το $\chi+1$ δεν είναι παράγοντας του $P(\chi)$.

β. i. Πρέπει $\sigma\upsilon\nu2\alpha=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu2\alpha=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow$
$2\alpha=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow \alpha=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\kappa\in Z$.

ii. $Q(\chi)=-\chi^3+2\chi^2-\chi-560$.

$$\begin{array}{rrrr|l} -1 & 2 & -1 & -560 & 12 \\ & -12 & -120 & -1452 & \\ \hline -1 & -10 & -121 & \boxed{-2012} & \end{array}$$

$.\ Q(12)=-2012$.

Το $Q(12)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(\chi):(\chi-12)$

Θέμα 3ο

α. Έχουμε $\alpha_4=\alpha_1+3\omega\Leftrightarrow 3\omega=9\Leftrightarrow\omega=3$.
$\alpha_3=\alpha_1+2\omega=8$.Άρα η εξίσωση γράφεται $4\chi^3-3\chi-1=0$ (1).Παρατηρούμε ότι το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης,οπότε έχουμε το παρακάτω σχήμα Horner:

$$\begin{array}{rrrr|l} 4 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ & 4 & 4 & 1 & \\ \hline 4 & 4 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(1)\Leftrightarrow(\chi-1)(4\chi^2+4\chi+1)=0\Leftrightarrow(\chi-1)(2\chi+1)^2=0\Leftrightarrow\chi-1=0\Leftrightarrow\chi=1$ ή $2\chi+1=0\Leftrightarrow$ $\chi=-\frac{1}{2}$.

β. $S_8=\frac{8}{2}(2a_1+7\omega)$ =4.25.

Η εξίσωση γίνεται $4^{-\chi}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{\chi}+2=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{2\chi}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{\chi}+2=0$ (2).

Θέτουμε $\left(\frac{1}{2}\right)^{\chi} = t$.Είναι $t > 0$.Η (2) γράφεται $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ή $t = 2$.

- Για $t = 1$, έχουμε $\left(\frac{1}{2}\right)^{\chi} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\chi} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \Leftrightarrow \chi = 0$.
- Για $t = 2$,έχουμε $\left(\frac{1}{2}\right)^{\chi} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\chi} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow \chi = -1$.

<u>Θέμα 4^ο^</u>

α. i. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $e^{-\chi} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-\chi} > 1 \Leftrightarrow e^{-\chi} > e^{0} \Leftrightarrow -\chi > 0 \Leftrightarrow \chi < 0$, αφού η εκθετική συνάρτηση με βάση το e είναι γνησίως αύξουσα.
Άρα $A = (-\infty, 0)$.

ii. Η παράσταση $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9$ είναι άθροισμα δέκα διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 2$.
Άρα $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9 = \alpha_1 \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = 2^{10} - 1$.Επιπλέον $f(-1) = -1 + \ln(e - 1)$.
Η εξίσωση ορίζεται όταν $\chi - 1 > 0 \Leftrightarrow \chi > 1$.
$(1) \Leftrightarrow \ln(\chi - 1) + 2^{10} - 1 = 2^{10} - 1 + \ln(e - 1) \Leftrightarrow \ln(\chi - 1) = \ln(e - 1) \Leftrightarrow \chi - 1 = e - 1 \Leftrightarrow \chi = e$.

β. i. Για κάθε $\chi \in (-\infty, 0), f(\chi) = lne^{\chi} + \ln(e^{-\chi} - 1) = \ln[e^{\chi}(e^{-\chi} - 1)] \Leftrightarrow f(\chi) = \ln(1 - e^{\chi})$.

ii. Για $\chi \in A, f(\chi) < 0 \Leftrightarrow \ln(1 - e^{\chi}) < ln1 \overset{\ln \nearrow}{\Longleftrightarrow} 1 - e^{\chi} < 1 \Leftrightarrow -e^{\chi} < 0 \Leftrightarrow e^{\chi} > 0$ που ισχύει.
'Αρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $\chi'\chi$.