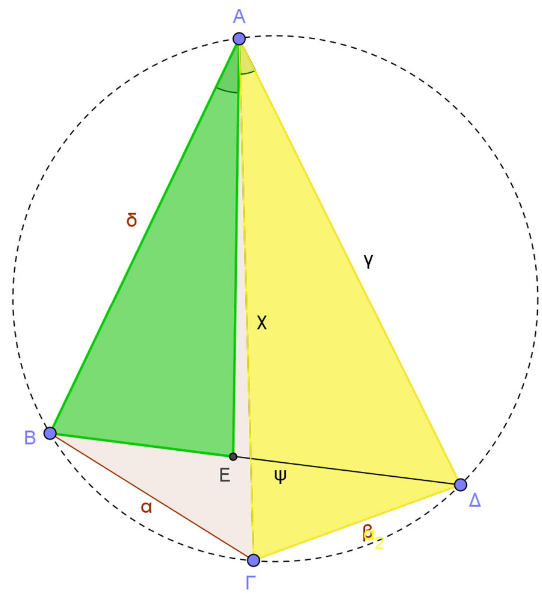
Ένα αξιοσημείωτο θεώρημα

<u>1ο Θεώρημα του Πτολεμαίου</u>

Αν ένα κυρτό τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο τότε το άθροισμα του γινομένου των απέναντι πλευρών του ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων του.

Απόδειξη του Πτολεμαίου

Έστω το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$. Θέτουμε $\mathrm{B\Gamma} = \alpha, \Gamma\Delta = \beta, \Delta\mathrm{A} = \gamma$, $\mathrm{AB} = \delta$ και $\mathrm{A\Gamma} = \chi, \mathrm{B}\Delta = \psi$.



Στη διαγώνιο $\mathrm{B}\Delta$ παίρνουμε σημείο E ,έτσι ώστε $\mathrm{B\hat{A}E} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$.

Τα τρίγωνα $\mathrm{ABE}, \mathrm{A\Gamma\Delta}$ είναι όμοια γιατί έχουν: $\mathrm{B\hat{A}E} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\mathrm{A\hat{B}E} = \mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα.Έτσι έχουμε $\dfrac{\delta}{\chi} = \dfrac{\mathrm{BE}}{\beta} \Leftrightarrow \beta\delta = \chi\,\mathrm{BE}$ (1).

Επίσης έχουμε ότι τα τρίγωνα $\mathrm{AE\Delta}, \mathrm{AB\Gamma}$ είναι όμοια γιατί έχουν $\mathrm{E\hat{A}\Delta} = \mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ και $\mathrm{A\hat{\Delta}E} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B}$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα.

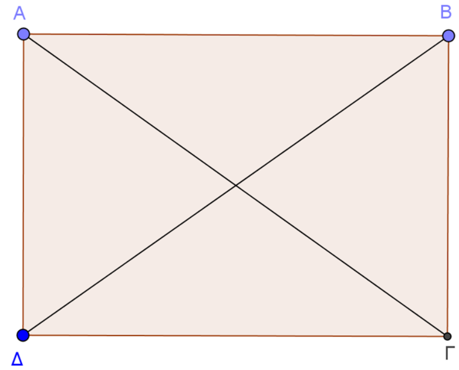
Από την ομοιότητα των τριγώνων έχουμε $\dfrac{\gamma}{\chi} = \dfrac{\mathrm{E\Delta}}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\gamma = \chi\,\mathrm{E\Delta}$ (2).

$(1)+(2) \Rightarrow \alpha\gamma + \beta\delta = \chi(\mathrm{BE} + \mathrm{E\Delta}) \Leftrightarrow \alpha\gamma + \beta\delta = \chi\psi$.

Σημείωση: Αν σε ένα κυρτό τετράπλευρο το άθροισμα του γινομένου των απέναντι πλευρών του ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων του,τότε το τετράπλευρο αυτό είναι εγγράψιμο.
Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος και του αντίστροφού του μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια της αντιστροφής.

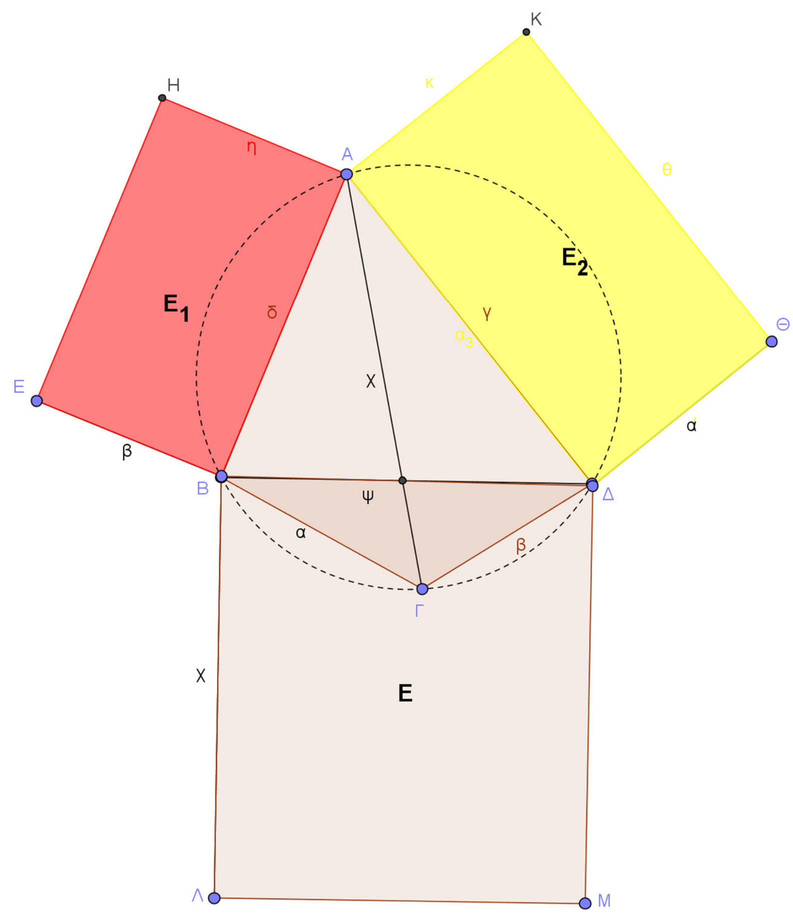
Σπύρος Γιαννακόπουλος

Σχόλιο 1: Η εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος σε ορθογώνιο,μας δίνει το Πυθαγόρειο θεώρημα.



Το ορθογώνιο είναι εγγράψιμο οπότε έχουμε: $AB.\Delta\Gamma + A\Delta.B\Gamma = A\Gamma.B\Delta \Leftrightarrow AB^2 + A\Delta^2 = B\Delta^2$.

Σχόλιο 2: Εξωτερικά του τετραπλεύρου κατασκευάζουμε ορθογώνια με πλευρές $AB, BE = \Gamma\Delta$, $A\Delta, \Delta\Theta = B\Gamma$ και $B\Gamma, B\Lambda = A\Gamma$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με βάση το 1ο θεώρημα του Πτολεμαίου είναι $E_1 + E_2 = E$.

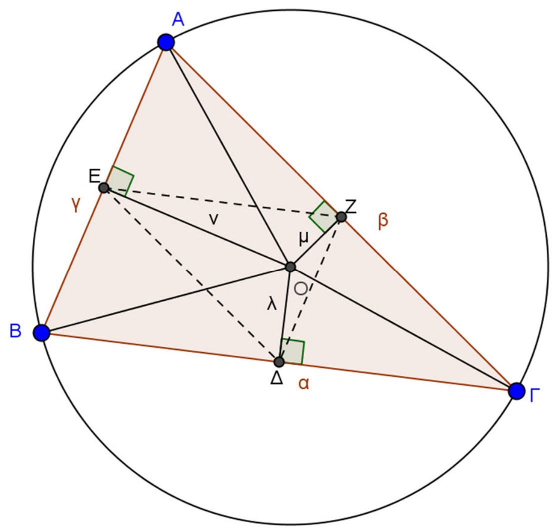
Σπύρος Γιαννακόπουλος

Άσκηση

Θεωρούμε τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ και τον περιγεγραμμένο κύκλο του (O,R).

Αν λ,μ,ν είναι οι αποστάσεις του O από τις πλευρές α,β,γ αντίστοιχα του τριγώνου δείξτε ότι $4\left(\dfrac{\alpha}{\lambda}+\dfrac{\beta}{\mu}+\dfrac{\gamma}{\nu}\right)=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\lambda\mu\nu}$.

Λύση



Τα σημεία $\Delta,\mathrm{E},\mathrm{Z}$ είναι μέσα των πλευρών $\mathrm{B\Gamma},\mathrm{AB},\mathrm{A\Gamma}$ σντίστοιχα.

Τα τετράπλευρα $\mathrm{O\Delta BE},\mathrm{OEAZ},\mathrm{OZ\Gamma\Delta}$ είναι εγγράψιμα οπότε από το 1° θεώρημα του Πτολεμαίου έχουμε:

Για το $\mathrm{O\Delta BE}$: $\mathrm{B\Delta.OE}+\mathrm{O\Delta.BE}=\mathrm{\Delta E.OB}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{2}\nu+\dfrac{\gamma}{2}\lambda=\dfrac{\beta}{2}R\Leftrightarrow\alpha\nu+\gamma\lambda=\beta R\Leftrightarrow$

$\dfrac{\alpha}{\lambda}+\dfrac{\gamma}{\nu}=\dfrac{\beta R}{\lambda\nu}$ (1).

Για το OEAZ: $\mathrm{AZ.OE}+\mathrm{AE.OZ}=\mathrm{EZ.OA}\Leftrightarrow\dfrac{\beta}{2}\nu+\dfrac{\gamma}{2}\mu=\dfrac{\alpha}{2}R\Leftrightarrow\beta\nu+\gamma\mu=\alpha R\Leftrightarrow$

$\dfrac{\beta}{\mu}+\dfrac{\gamma}{\nu}=\dfrac{\alpha R}{\mu\nu}$ (2).

Για το $\mathrm{OZ\Gamma\Delta}$: $\mathrm{\Delta\Gamma.OZ}+\mathrm{Z\Gamma.O\Delta}=\mathrm{\Delta Z.O\Gamma}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{2}\mu+\dfrac{\beta}{2}\lambda=\dfrac{\gamma}{2}R\Leftrightarrow\alpha\mu+\beta\lambda=\gamma R\Leftrightarrow$

$\dfrac{\alpha}{\lambda}+\dfrac{\beta}{\mu}=\dfrac{\gamma R}{\lambda\mu}$ (3).

Προσθέτουμε τις (1),(2),(3) κατά μέλη και έχουμε:

$$2\left(\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\nu}\right)=\frac{\beta R}{\lambda\nu}+\frac{\alpha R}{\mu\nu}+\frac{\gamma R}{\lambda\mu}\Leftrightarrow 2\left(\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\nu}\right)=\frac{R\left(\beta\mu+\alpha\lambda+\gamma\nu\right)}{\lambda\mu\nu}\Leftrightarrow$$

$$4\left(\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\nu}\right)=\frac{2R\left(\beta\mu+\alpha\lambda+\gamma\nu\right)}{\lambda\mu\nu}\ \text{(4)}.$$

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Έχουμε $(\text{ΟΒΓ}) = \frac{1}{2}\alpha\lambda \Leftrightarrow \alpha\lambda = 2(\text{ΟΒΓ})$.Όμοια $\beta\mu = 2(\text{ΟΑΓ})$ και $\nu\gamma = 2(\text{ΟΑΒ})$.

$$(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΟΒΓ}) + (\text{ΟΑΓ}) + (\text{ΟΑΒ}) \Leftrightarrow 2(\text{ΑΒΓ}) = 2(\text{ΟΒΓ}) + 2(\text{ΟΑΓ}) + 2(\text{ΟΑΒ}) \Leftrightarrow$$

$$2\frac{\alpha\beta\gamma}{4R} = \beta\mu + \alpha\lambda + \gamma\nu \Leftrightarrow 2R\left(\beta\mu + \alpha\lambda + \gamma\nu\right) = \alpha\beta\gamma \quad (5),$$

Άρα $(4) \overset{(5)}{\Rightarrow} 4\left(\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\mu} + \frac{\gamma}{\nu}\right) = \frac{\alpha\beta\gamma}{\lambda\mu\nu}$.

Σημείωση: Η παραπάνω άσκηση είχε τεθεί ως άσκηση τριγωνομετρίας στις εισαγωγικές εξετάσεις για τη σχολή Ευελπίδων το 1945.