ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.**»**

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\bigcap B\neq\varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to -\infty}\alpha^x=+\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ell nx,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$, και το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν (ε_1): $y=-x$ και (ε_2): $y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$, και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > e - 1 - \pi$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1,0) \\ e^x \eta\mu x, & x \in [0,\pi] \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x) = e^{5x}$, $x \in \mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \pi$ **.**

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ε Ν Δ Ε Ι Κ Τ Ι Κ Ε Σ   Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α   Π Ρ Ο Σ Α Ν Α Τ Ο Λ Ι Σ Μ Ο Υ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο.

Α2. **α.** Ψ.

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|=\begin{cases}-x & \text{αν } x\le 0\\ x & \text{αν } x>0\end{cases}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$,αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0=f(0)$.

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Πράγματι: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1$.

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$,η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
Άρα αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της δεν έπεται αναγκαστικά ότι στο σημείο αυτό η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.

Α3. Βλέπε σχολικό βιβλίο
Α4. **α** $\rightarrow$ Λάθος
β $\rightarrow$ Σωστό
γ $\rightarrow$ Λάθος
δ $\rightarrow$ Σωστό
ε $\rightarrow$ Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1 Έχουμε $D_f=(0,+\infty)$ και $D_g=R-\{1\}$.

Θεωρούμε το σύνολο $\Sigma=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=\{x\in R-\{1\}\,/\,g(x)>0\}$.

$$\begin{cases} x\in R-\{1\}\\ \text{και}\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq 1\ (1)\\ \text{και}\\ \dfrac{x}{1-x}>0\Leftrightarrow x(x-1)<0\ (2)\end{cases}$$

Η (2) είναι ανίσωση $2^{ου}$ βαθμού οπότε:
\

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x(x-1)$		$+$	0	$-$		$+$	

Άρα από τις (1),(2) έχουμε $x \in (0,1)$,οπότε $\Sigma = (0,1)$.Έτσι ορίζεται η συνάρτηση fog με πεδίο ορισμού το Σ και τύπο $(fog)(x) = f(g(x)) = \ln\frac{x}{1-x}$.

B2. Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$\varphi'(x) = \frac{1-x}{x}\left(\frac{1-x}{x}\right)' = ... = \frac{1-x}{x}\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x(1-x)}$.Αφού $0 < x < 1 \Rightarrow 1-x > 0$.Άρα $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.Συνεπώς η φ είναι γνησίως αύξουσα,οπότε είναι "1-1" και άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε $\frac{x}{1-x} = u$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{1-x} = 0$.Άρα $\lim\limits_{x\to o^+} h(x) = \lim\limits_{u\to 0^+}\ln u = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{1-x} = +\infty \Rightarrow u \to +\infty$.Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{u\to +\infty}\ln u = +\infty$.

Επειδή η h είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$h((0,1)) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x), \lim_{x\to +\infty} h(x)\right) = (-\infty, +\infty) = R$$

Για $x \in (0,1)$ και $y \in R$ έχουμε

$$h(x) = y \Leftrightarrow \ln\frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y - xe^y \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y+1} .$$

Άρα $h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}, x \in R$.

B3. Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ για κάθε $x \in R$.Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο R οπότε δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Η φ' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$\varphi''(x) = \frac{e^x(e^x+1)^2 - 2e^x e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^4} = ... = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} .$$

$\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

$\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi''(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$		$\nearrow$	$\varphi(0)$ Σ.Κ	$\searrow$	

Η φ είναι κυρτή στο $\left(-\infty,0\right]$ και κοίλη στο $\left[0,+\infty\right)$,οπότε το σημείο $M\left(0,\varphi(0)\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι σημείο καμπής της C_{φ}.

B4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$.Άρα ο άξονας $x'x$ των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

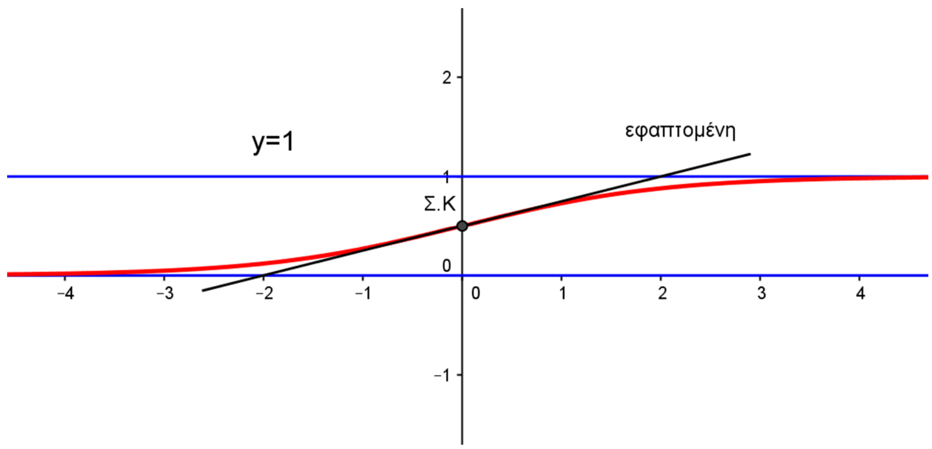
$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{x}\right)'}{\left(e^{x}+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}}=1$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Λαμβάνοντας υπόψη μας το ερώτημα B_3 έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της φ .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$		$+$	
$\varphi''(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$\varphi(0)=\frac{1}{2}$ Σ.Κ	$\nearrow$	1

Η γραφική παράσταση της φ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (κόκκινο χρώμα).



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Προφανώς $A \notin C_f$. Έστω $K\left(x_0, f(x_0)\right) \in C_f$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\sigmaυνx$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Κ έχει εξίσωση: $y - f(x_0) = f'(x_0)\left(x - x_0\right) \Leftrightarrow$

$y + ημx_0 = -\left(x - x_0\right)συνx_0$

Απαιτούμε η εφαπτομένη να διέρχεται από το Κ οπότε έχουμε:

$$-\frac{\pi}{2} + ημx_0 = -\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)συνx_0 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)συνx_0 + ημx_0 - \frac{\pi}{2} = 0 \quad (1).$$

Η (1) είναι εξίσωση με άγνωστο το x_0.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)συνx + ημx - \frac{\pi}{2}, x \in [0, \pi]$.

Τα σημεία μηδενισμού της g είναι λύσεις της (1).

Έχουμε $g(0) = 0$ και $g(\pi) = 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = -συνx - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)ημx + συνx \Leftrightarrow g'(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)ημx.$$

$$g'(x) = 0 \overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x = 0 \text{ ή } x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \pi.$$

Για $x \in (0, \pi)$, $g'(x) > 0 \overset{ημx>0}{\Leftrightarrow} x - \frac{\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{2}$. Άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

x	$-\infty$	0		$\frac{\pi}{2}$		π	$+\infty$
$g'(x)$			$-$	0	$+$		
$g(x)$		0	$\searrow$	$g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ολ.ελαχ	$\nearrow$	0	

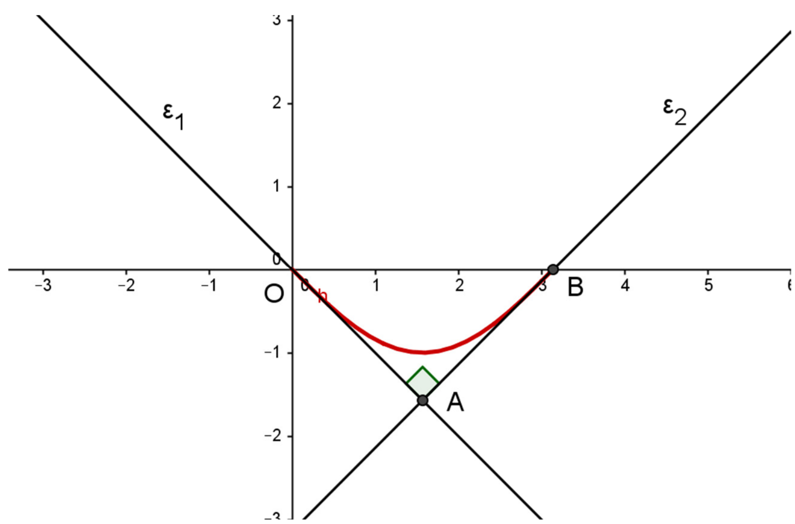
$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{2}$.Στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ η g είναι γνησίως φθίνουσα οπότε το 0 είναι το μόνο σημείο μηδενισμού της g στο διάστημα αυτό.Όμοια το π είναι το μόνο σημείο μηδενισμού της g στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.Άρα η g ακριβώς δύο σημεία μηδενισμού το 0 και το π .

Άρα $(1)\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=\pi$.

Αν $x_0=0$ έχουμε την εφαπτομένη $\varepsilon_1: y=-x$ και για $x_0=\pi$ έχουμε την εφαπτομένη $\varepsilon_2: y=x-\pi$ οι οποίες είναι μόνες εφαπτομένες της C_f που άγονται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$.

Γ2. Η γραφική παράσταση της f είναι η συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ στο $[0,\pi]$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημίτονο.

Επίσης $\lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}=-1\Leftrightarrow \varepsilon_1\perp\varepsilon_2$.Έτσι έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Είναι $B(\pi,0)$ και $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$.

$\left(OAB\right)=\frac{1}{2}(OB)\,d(A,x'x)=\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi^2}{4}$ τετρ.μονάδες

Είναι $E_1=\left(OAB\right)-E_2 \Leftrightarrow E_1=\frac{\pi^2}{4}-E_2$ (2).

$E_2=\int_0^{\pi}\left|f(x)\right|dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x\,dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=2$ τετρ.μονάδες.

$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2}-1 \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2}=\frac{\pi^2}{8}-1$.

Γ3. $f''(x)=\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\pi\right)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $\left[0,\pi\right]$ είναι κυρτή στο $\left[0,\pi\right]$, οπότε $f(x)\ge y_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow f(x)\ge x-\pi \Leftrightarrow f(x)-x+\pi\ge 0$.Το “=” ισχύει μόνο για $x=\pi$

Άρα για κάθε $x\in\left[0,\pi\right)$ είναι $f(x)-x+\pi>0$ και $\lim_{x\to\pi}\left(f(x)-x+\pi\right)=0$.

$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+\pi}{f(x)-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{1}{f(x)-x+\pi}\left(f(x)+\pi\right)\right]=(+\infty).\pi=+\infty$.

Γ4. Από το Γ_3 έχουμε ότι για κάθε $x\in\left[1,e\right]$

$f(x)>x-\pi \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}>1-\frac{\pi}{x} \Rightarrow \int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx=\left[x-\pi\ln x\right]_1^e=e-\pi-1 \Leftrightarrow$

$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Στο $\left[-1,0\right)$ $f(x)=\left|x\right|^{\frac{4}{3}}=\left(-x\right)^{\frac{4}{3}}$,οπότε είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων οπότε είναι συνεχής στο $\left[-1,0\right)$.

Στο $\left(0,\pi\right]$ η f είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

$\lim_{x\to0^-}f(x)=0=f(0)$ και $\lim_{x\to0^+}f(x)=0=f(0)$.Άρα η f είναι συνεχής και στο 0 ,οπότε είναι συνεχής στο $\left[-1.\pi\right]$.

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία του $\left(-1,\pi\right)$ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η f' μηδενίζεται.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[-1,0\right)$ με $f'(x)=\left(\left(-x\right)^{\frac{4}{3}}\right)'=-\frac{4}{3}\left(-x\right)^{\frac{1}{3}}=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}<0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\pi\right]$ ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$f'(x)=e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-x}=-\lim_{x\to 0^-}(-x)^{\frac{1}{3}}=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{-x}=0\ .$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x\dfrac{\eta\mu\chi}{x}\right)=1$.Αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 .οπότε το 0 είναι κρίσιμο σημείο της f .

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu\chi\right)=0\Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu\chi\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-1$ (1) και

$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

$(1)\Leftrightarrow x=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$.Άρα και το $\dfrac{3\pi}{4}$ είναι κρίσιμο σημείο της f.

Τελικά η f έχει δύο κρίσιμα σημεία στο $\left[-1,\pi\right]$ και αυτά είναι το 0 και το $\dfrac{3\pi}{4}$.

Δ2. Για $x\in\left[-1,0\right)$ $f(x)=-\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{-x}<0$.

Για $x\in\left(0,\pi\right]$ $f(x)=e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ η f' είναι συνεχής με $f'(x)\neq 0$.Άρα στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$.Συνεπώς $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Όμοια η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$ και επειδή

$f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\eta\mu\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)<0$ είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$

Έχουμε $f(-1)=1, f(0)=0$, $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\eta\mu\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ και $f(\pi)=0$.

x	$-\infty$	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π	$+\infty$
$f'(x)$			$-$		$+$	0	$-$		
$f(x)$		$f(-1)$ τοπ.μεγ.	$\searrow$	$f(0)$ ολ.ελαχ.	$\nearrow$	$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ ολ.μεγ.	$\searrow$	$f(\pi)$ ολ.ελαχ.	

Δεδομένου ότι η f είναι συνεχής, από τον παραπάνω πίνακα μονοτονίας έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1,0],\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$.Για $x=-1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=1$,για $x=0$ και $x=\pi$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(\pi)=0$ και για $x=\frac{3\pi}{4}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f\left([-1,\pi]\right)=\left[f(0),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$.

Δ3. Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[0,\pi]$,οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$E=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx$ τετρ.μονάδες.

Για κάθε $x\in[0,\pi]$, $\eta\mu x\le 1\Leftrightarrow e^x\eta\mu x\le e^x$ (2) .Το “=” ισχύει στο $\frac{\pi}{2}$.

Η συνάρτηση $\varphi(x)=e^x, x\in R$ είναι γνησίως αύξουσα,οπότε για κάθε $x\in[0,\pi]$ έχουμε

$x\le 5x\Leftrightarrow e^x\le e^{5x}$ (3) .Το “=” ισχύει στο μηδέν.

Από τις (2),(3) προκύπτει ότι $e^x\eta\mu x<e^{5x}\Leftrightarrow f(x)<g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$.

Άρα $E=\int_0^{\pi}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_0^{\pi}g(x)dx-\int_0^{\pi}f(x)dx$.

$\int_0^{\pi}g(x)dx=\int_0^{\pi}e^{5x}dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}=\frac{e^{5\pi}-1}{5}$.

$\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}e^x\eta\mu xdx=\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\eta\mu xdx=\left[e^x\eta\mu\chi\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu xdx=$

$-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu xdx=-\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\sigma\upsilon\nu xdx=-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu xdx\Leftrightarrow 2\int_0^{\pi}e^x\eta\mu xdx=e^{\pi}+1\Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi}e^x\eta\mu xdx=\frac{e^{\pi}+1}{2}$.

Άρα $E=\frac{e^{5x}-1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}$ τετρ.μονάδες .

Δ4 . Η εξίσωση ορίζεται στο $\left[-1,\pi\right]$.

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}\left(4x-3\pi\right)^2=8\sqrt{2}\Leftrightarrow 16f(x)-\left(4x-3\pi\right)^2=e^{\frac{3\pi}{4}}8\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 \quad (4)$$

Προφανής ρίζα της (4) είναι το $\frac{3\pi}{4}$.

Από το Δ_3 έχουμε ότι για κάθε $x\in\left[-1,\pi\right]$ είναι $f(x)\le f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\le 0$ (5).

Αν δεχτούμε ότι η εξίσωση στο $\left[-1,\pi\right]$ έχει ρίζα και το $\rho\ne\frac{3\pi}{4}$ τότε $f(\rho)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left(\rho-\frac{3\pi}{4}\right)^2$.

Λόγω της (5) έχουμε $\left(\rho-\frac{3\pi}{4}\right)^2\le 0\Leftrightarrow\left(\rho-\frac{3\pi}{4}\right)^2=0\Leftrightarrow\rho=\frac{3\pi}{4}$.Άτοπο.

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το $\frac{3\pi}{4}$.