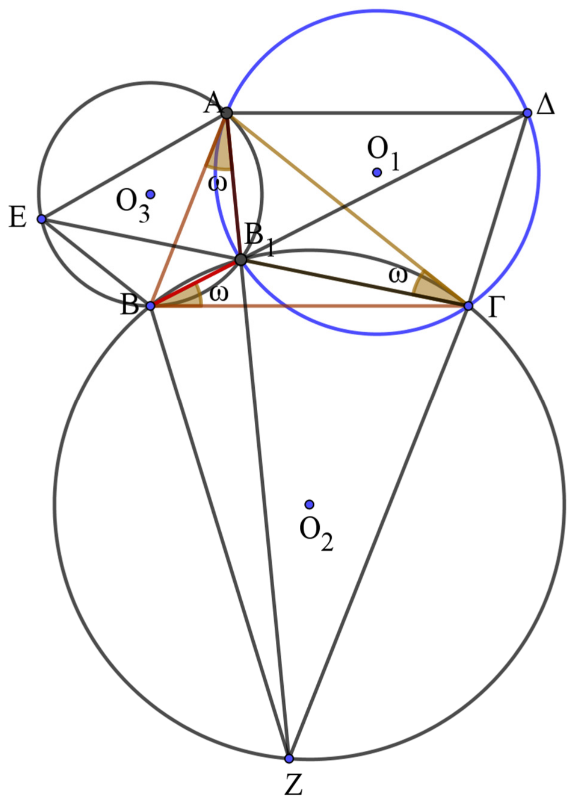
Πρόταση: Έστω B_1 το πρώτο σημείο Brocard ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και R_1, R_2, R_3 οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $AB_1\Gamma, BB_1\Gamma, AB_1B$ και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. Ισχύει $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = R^3$.

Απόδειξη



Ο κύκλος (O_1, R_1) εφάπτεται της AB στο A, οπότε $B\hat{A}B_1 = A\hat{\Delta}B_1$ (χορδής και εφαπτομένης) $\Rightarrow \hat{\omega} = A\hat{\Delta}B_1 \Rightarrow$

$A\hat{\Delta}B_1 = \Delta\hat{B}\Gamma \Rightarrow A\Delta // B\Gamma$.

$B\hat{A}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma$ (χορδής και εφαπτομένης).

και $\Delta\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$ αφού $A\Delta // B\Gamma$.

Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma, A\Delta\Gamma$ είναι όμοια

οπότε $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{R_1}{R} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{R_1}{R}$ (1).

Ο κύκλος (O_2, R_2) εφάπτεται στην $A\Gamma$.

$A\hat{\Gamma}B_1 = \Gamma\hat{Z}B_1 = \hat{\omega}$ (χορδής και εφαπτομένης)

Άρα $Z\Gamma // AB$. Τα τρίγωνα $B\Gamma Z, AB\Gamma$ είναι όμοια, οπότε $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{R_2}{R} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{R_2}{R}$ (2).

Όμοια $EB // A\Gamma$ και τα τρίγωνα $AEB, AB\Gamma$ είναι όμοια. Άρα $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{R_3}{R} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\beta} = \frac{R_3}{R}$ (3).

Με πολλαπλασιασμό των (1),(2),(3) παίρνουμε : $\frac{R_1.R_2.R_3}{R^3} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\beta} = 1 \Leftrightarrow R_1.R_2.R_3 = R^3$.

Σπύρος Γιαννακόπουλος