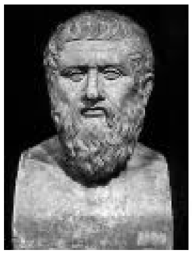
Τ Ε Τ Ρ Α Γ Ω Ν Ι Ζ Ο Υ Σ Α Κ Α Μ Π Υ Λ Η

Ιππίας ο Ηλείος (5ος αι. π.Χ.)



Ο **Ιππίας ο Ηλείος** ήταν σοφιστής των χρόνων του Σωκράτη, σύγχρονος του Πρωταγόρα (5ος π.Χ. αι.). Δίδαξε στην Αθήνα. Έργα του, "Τρωικός λόγος", "*Ολυμπιονικών αναγραφή*" και "*Εθνών ονομασίες*". Σημαντικές πληροφορίες για τον Ιππία παρέχονται από τους διαλόγους του Πλάτωνα "*Ιππίας μείζων*" και "*Ιππίας ελάσσων*". Η αυθεντικότητα του δεύτερου έργου αμφισβητείται.

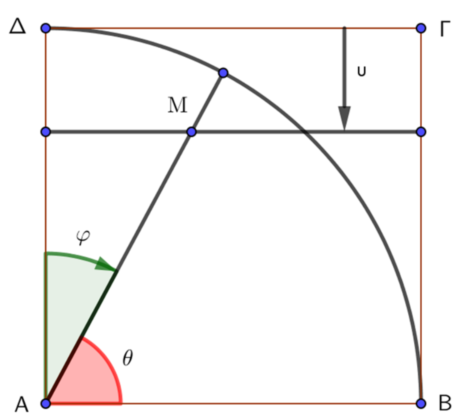
Ο Ιππίας ασχολήθηκε επίσης με τα μαθηματικά Ο Πρόκλος αναφέρει στα "Σχόλια στο 1ο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη" ότι ο Ιππίας ασχολήθηκε με τη Γεωμετρία και δοξάστηκε από αυτή.

Στον Ιππία αποδίδεται η λύση της διαίρεσης μιας γωνίας σε αυθαίρετο αριθμό ίσων μεταξύ τους γωνιών. Το γενικό αυτό πρόβλημα έχει τη ρίζα του σε ένα πιο συγκεκριμένο, αυτό της τριχοτόμησης μιας γωνίας. Η διχοτόμηση μιας γωνίας είχε στην αρχαιότητα γνωστή γεωμετρική λύση με κανόνα και διαβήτη, πλην όμως η τριχοτόμησή της όχι. Ο σοφιστής Ιππίας έδειξε πως το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με τη χρήση μιας καμπύλης γραμμής, της επονομαζόμενης τετραγωνίζουσας που φέρει το όνομα του Ιππία.

Πηγή:wikipedia

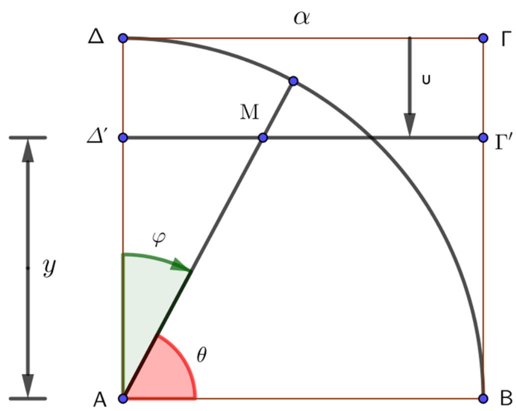
Ιδέα του Ιππία

Έστω ένα τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ Με κέντρο το $Α$ και ακτίνα $ΑΔ$ εντός του τετραγώνου γράφουμε τεταρτοκύκλιο. Η πλευρά $ΔΓ$ ολισθένει παράλληλα προς την $ΑΒ$ εκτελώντας ομαλή ευθύγραμμη κίνηση με ταχύτητα υ.Η πλευρά $ΑΔ$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με κέντρο το $Α$ και το $Δ$ διαγράφει το τόξο $\overset{\frown}{ΔΑ}$.



Η κίνηση των πλευρών $ΔΓ, ΑΔ$ γίνεται ξεκινώντας ταυτόχρονα έτσι ώστε κατά την κίνησή τους να τέμνονται και να τερματίζουν πάνω στην $ΑΒ$ Το σημείο τομής $Μ$ των κινούμενων πλευρών διαγράφει μία καμπύλη από το $Δ$ μέχρι την πλευρά $ΑΒ$.Η καμπύλη αυτή ονομάζεται τετραγωνίζουσα και χρησιμοποιήθηκε από τον Ιππία για την τριχοτόμηση γωνίας.

Ας θεωρήσουμε ότι τη χρονική στιγμή t έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Έχουμε $(\Delta\Delta') = \upsilon t$ (1)

Έστω ω η γωνιακή ταχύτητα της κίνησης της πλευράς $A\Delta$,τότε είναι $\varphi = \omega t$ (2).

Με διαίρεση κατά μέλη των (1),(2) παίρνουμε:

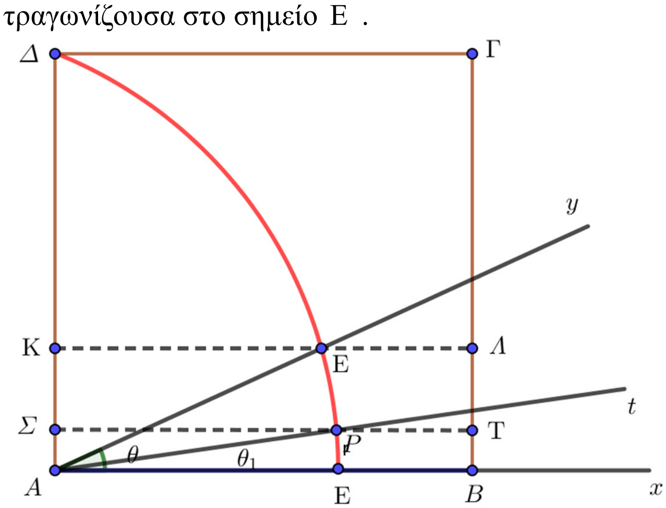
$$\frac{(\Delta\Delta')}{\varphi} = \frac{\upsilon}{\omega} \Leftrightarrow \frac{\alpha - y}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \frac{\upsilon}{\omega} \text{ (3), } (\upsilon, \omega \text{ σταθερά}).$$

Παρατηρούμε λόγω της (3) ότι ο λόγος $\frac{\alpha - y}{\frac{\pi}{2} - \theta}$ είναι σταθερός, οπότε όταν τερματίζεται η κίνηση θα έχουμε $\frac{\alpha - y}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow$ (ιδιότητα αναλογιών) $\frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\alpha - (\alpha - y)}{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}} = \frac{y}{\theta} \Leftrightarrow$ (ιδιότητα αναλογιών) $\frac{y}{\alpha} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}$ (I).

Τριχοτόμηση γωνίας με την τετραγωνίζουσα

(Λύση του Ιππία)

Έστω τυχαία γωνία $x\hat{A}y$ με μέτρο θ ,Στην πλευρά της Ax παίρνουμε τμήμα AB μήκους α και κατασκευάζουμε το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έτσι ώστε η πλευρά Ay να τέμνει το τετράγωνο. Η καμπύλη ΔE (κόκκινο χρώμα) είναι η τετραγωνίζουσα.Η πλευρά Ay της γωνίας τέμνει την τετραγωνίζουσα στο σημείο E .



Από το E φέρουμε παράλληλη ευθεία προς την AB που τέμνει τις πλευρές $A\Delta, B\Gamma$ στα σημεία K, Λ αντίστοιχα.Στο τμήμα AK παίρνουμε σημείο Σ έτσι ώστε $(A\Sigma) = \frac{1}{3}(AK)$ και φέρουμε $\Sigma T // AB$ που τέμνει την τετραγωνίζουσα στο σημείο P ,

Με βάση τη σχέση (I) έχουμε:

$\frac{(AK)}{\alpha} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}$ και $\frac{(A\Sigma)}{\alpha} = \frac{\theta_1}{\frac{\pi}{2}}$ όπου θ_1 το μέτρο της γωνίας $B\hat{A}P$.Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε:

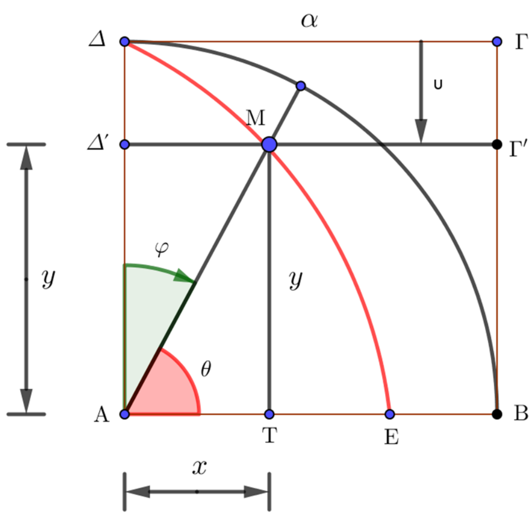
$\frac{(AK)}{(A\Sigma)} = \frac{\theta}{\theta_1} \Leftrightarrow 3 = \frac{\theta}{\theta_1} \Leftrightarrow \theta_1 = \frac{1}{3}\theta$. Έτσι η γωνία θ έχει τριχοτομηθεί.

Σχόλιο
Το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας είχε τεθεί από τους αρχαίους Έλληνες να γίνει με κανόνα (μη βαθμολογημένος χάρακας) και διαβήτη. Η παραπάνω λύση δεν είναι αποδεκτή με την προϋπόθεση που είχε τεθεί. Το $19^{\text{ο}}$ αιώνα αποδείχτηκε ότι το πρόβλημα είναι άλυτο με κανόνα και διαβήτη.

Ο Δεινόστρατος και ο τετραγωνισμός του κύκλου

Ο Δεινόστρατος, ο αδελφός του Μέναιχμου και μαθητής του Εύδοξου, ήταν σπουδαίος μαθηματικός του $4^{\text{ου}}$ προχριστιανικού αιώνα. Μια από τις σημαντικότερες μαθηματικές εργασίες του ήταν η προσπάθεια του να τετραγωνίσει τον κύκλο.

Ο Δεινόστρατος πήρε την καμπύλη την οποία ο Ιππίας επινόησε για να πετύχει την τριχοτόμηση της γωνίας και τη χρησιμοποίησε για να τετραγωνίσει τον κύκλο. Η διαδικασία που ακολούθησε θα περιγραφεί εν μέρει με σύγχρονα μαθηματικά.



Η τετραγωνίζουσα είναι η κόκκινη καμπύλη. Έχουμε αποδείξει ότι: $\dfrac{y}{\alpha}=\dfrac{\theta}{\dfrac{\pi}{2}} \Leftrightarrow y=\dfrac{2\alpha}{\pi}\theta$.Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΤΑΜ έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{y}{x}=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2\alpha}y\right) \Leftrightarrow$$

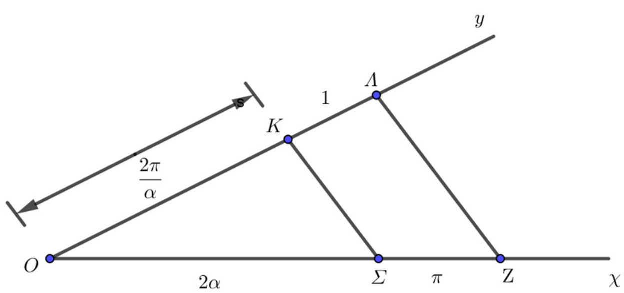
$x=\dfrac{y}{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2\alpha}y\right)} \Leftrightarrow \; x=\dfrac{2\alpha}{\pi}\dfrac{\dfrac{\pi y}{2\alpha}}{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi y}{2\alpha}\right)}$.Όταν $y\to 0$ το x τείνει να γίνει ίσο με το τμήμα

ΑΕ .Θέτουμε $\dfrac{\pi y}{2\alpha}=u$. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\pi y}{2\alpha}=0 \Rightarrow u\to 0$. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi y}{2\alpha}}{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi y}{2\alpha}\right)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\varepsilon\varphi u}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u}{\dfrac{\eta\mu u}{u}}=1$

Άρα όταν $y\to 0 \Rightarrow \; x\to\dfrac{2\alpha}{\pi}$,οπότε μπορούμε να πούμε ότι $x=AE=\dfrac{2\pi}{\alpha}$.

Αν όμως μπορούμε να κατασκευάσουμε το ΑΕ , σκέφτηκε ο Δεινόστρατος, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε το π.

Κατασκευάζουμε μία γωνία xOy και στην ημιευθεία Oy παίρνουμε τμήμα $OK = AE = \frac{2\pi}{\alpha}$ και τμήμα $K\Lambda$ με μήκος 1 και στην ημιευθεία Ox παίρνουμε τμήμα $O\Sigma$ με μήκος 2α. Από το Λ κατασκευάζουμε παράλληλη ευθεία της $K\Sigma$ που τέμνει την Ox στο σημείο. Z.

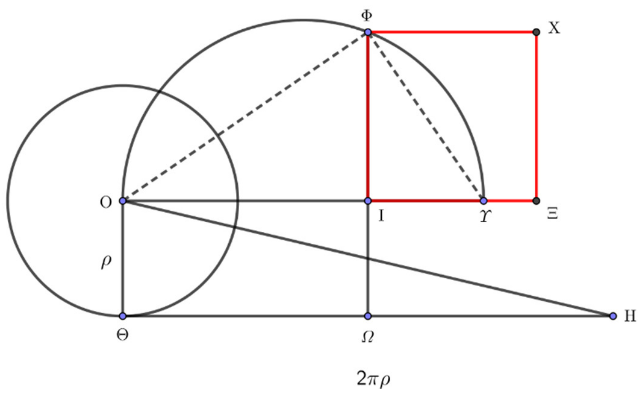


Από το θεώρημα του Θαλή έχουμε $\frac{(OK)}{(O\Sigma)} = \frac{(K\Lambda)}{(\Sigma Z)} \Leftrightarrow$

$\frac{\frac{2\alpha}{\pi}}{2\alpha} = \frac{1}{(\Sigma Z)} \Leftrightarrow (\Sigma Z) = \pi$.

Άρα κατασκευάσαμε το π.

Κατασκευάζουμε τον κύκλο (O,ρ) και μία εφαπτομένη του κύκλου. Έστω Θ το σημείο επαφής. Στην εφαπτομένη παίρνουμε τμήμα ΘH με μήκος $2\pi\rho$.



Στο μέσο Ω του ΘH υψώνουμε κάθετη ευθεία ε και κατασκευάζουμε το ορθογώνιο $O\Theta\Omega I$. Προεκτείνουμε το τμήμα OI και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα $I\Upsilon = I\Theta$.

Με διάμετρο το $O\Upsilon$ γράφουμε ημικύκλιο στο ημιεπίπεδο που δεν περιέχει το ΘH. Η ευθεία ε τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Φ.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Phi O\Upsilon$ έχουμε $(\Phi I)^2 = (OI).(I\Upsilon) = \pi\rho.\rho = \pi\rho^2$.

Έτσι κατασκευάσαμε το τετράγωνο $I\Xi X\Phi$ του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν δοσμένου κύκλου.

— Και εδώ ισχύουν ότι αναφέραμε στο παραπάνω σχόλιο.