Ένας άλλος τρόπος απόδειξης

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, x\in\left[-\dfrac{4}{\pi},0\right)\cup\left(0,\dfrac{2}{\pi}\right] \\ 0, x=0\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, x\in\left[-\dfrac{4}{\pi},0\right)\cup\left(0,\dfrac{2}{\pi}\right]. \\ 0, x=0\end{cases}$$

Για την f πληρείται στο $\left[-\dfrac{4}{\pi},\dfrac{2}{\pi}\right]$ το θεώρημα Darboux.

Θα δείξουμε ότι η f' δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$ με ουσιώδη ασυνέχεια, δηλαδή δεν υπάρχει ένα τουλάχιστον των πλευρικών ορίων της f' στο $x_0=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x\eta\mu\dfrac{1}{\chi}\right)=0$. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu x$. Δεχόμαστε προς στιγμή ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu x=\rho$.

Επειδή $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1$,αναγκαστικά $\rho\in R$ με $-1\le\rho\le 1$.

Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\eta\mu x$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\overset{x+\frac{\pi}{2}=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\sigma\upsilon\nu u=\rho\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(-\eta\mu x)=\rho\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu x=-\rho$ (1).
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\overset{x-\frac{\pi}{2}=\omega}{\underset{\omega\to+\infty}{=}}\lim\limits_{\omega\to+\infty}\sigma\upsilon\nu\omega=\rho\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu x=\rho$ (2)

Από τις (1),(2) προκύπτει $\rho=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu x=\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu x=0$.

Όμως $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x\right)=1\Rightarrow 0=1$.Άτοπο,

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu x$,οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.

Όμοια δείχνουμε ότι δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$.

Σπύρος Γιαννακόπουλος