Μ Α Γ Ι Σ Σ Α Τ Η Σ Α Ν Ι Ε Σ Ι (Agnesi)

Πρόκειται για μία καμπύλη που είχε μελετηθεί από τον Pierre Fermat (1601-1665).Ο Λουίτζι Γκουίντο Γκράντι (1671-1742) ,καθηγητής μαθηματικών στο πανεπιστήμιο της Πίζας, ονόμασε την καμπύλη,λόγω της μορφής της, versiera («γυριστή» από το λατινικό vertere που σημαίνει «γυρίζω»).Στην ιταλική γλώσσα υπάρχει και η λέξη aversiera που σημαίνει «γυναίκα του διαβόλου».Όταν η Ιταλίδα φιλόσοφος και μαθηματικός Maria Agnesi (1718-1799) διαπραγματεύτηκε στο βιβλίο της Instituzioni Analitiche την καμπύλη του Fermat,οι κατοπινοί μεταφραστές του έργου της αντί να χρησιμοποιήσουν την ονομασία του Γκράντι από λάθος μετάφραση χρησιμοποίησαν τη λέξη aversiera.Έτσι η καμπύλη του Fermat έμεινε με την ονομασία «μάγισσα της Ανιέσι».

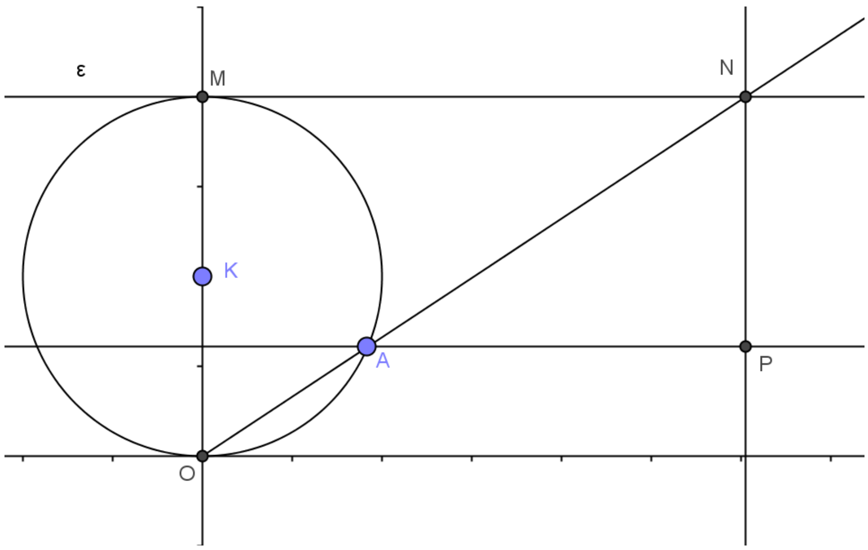
Αφορμή για το άρθρο αυτό είναι το ερώτημα B_4 των θεμάτων Μαθηματικά Προσανατολισμού 2016.Η γραφική παράσταση του B_4 αν «αναποδογυριστεί» μοιάζει με τη «μάγισσα της Ανιέσι».

Πρόβλημα

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οχψ θεωρούμε κύκλο (Κ,α) α>0 με Κ(0,α) και την εφαπτομένη του ε στο σημείο Μ(0,2α).Έστω Α ένα τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό του Ο.Η ημιευθεία ΟΑ τέμνει την ε στο σημείο Ν.Από το Α φέρουμε παράλληλο προς τον άξονα χ'χ που τέμνει την παράλληλο από το Ν προς τον άξονα ψ'ψ στο σημείο Ρ.Αν το Α διαγράφει τον κύκλο,να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Ρ.

Λύση

<u>1ος τρόπος: Αναλυτική προσέγγιση</u>



Έστω τυχαία θέση του Α πάνω στον κύκλο διαφορετική του Μ και του Ο.
Η εξίσωση της ΟΑ είναι: ΟΑ :$\psi = \lambda\chi, \lambda \neq 0$.

Επίσης η εξίσωση του κύκλου είναι: $C: \chi^2 + (\psi - \alpha)^2 = \alpha^2$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Α προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} \psi=\lambda\chi \\ \chi^2+(\psi-\alpha)^2=\alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi=\lambda\chi \\ \chi=\dfrac{2\alpha\lambda}{1+\lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi=\dfrac{2\alpha\lambda^2}{1+\lambda^2} \\ \chi=\dfrac{2\alpha\lambda}{1+\lambda^2} \end{cases}$$.Άρα $A\left(\dfrac{2\alpha\lambda}{1+\lambda^2},\dfrac{2\alpha\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)$.

Η τεταγμένη του Α είναι τεταγμένη και του Ρ.
Οι συντεταγμένες του Ν προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} \psi=2\alpha \\ \psi=\lambda\chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi=2\alpha \\ \chi=\dfrac{2\alpha}{\lambda} \end{cases}$$.Άρα $N\left(\dfrac{2\alpha}{\lambda},2\alpha\right)$.

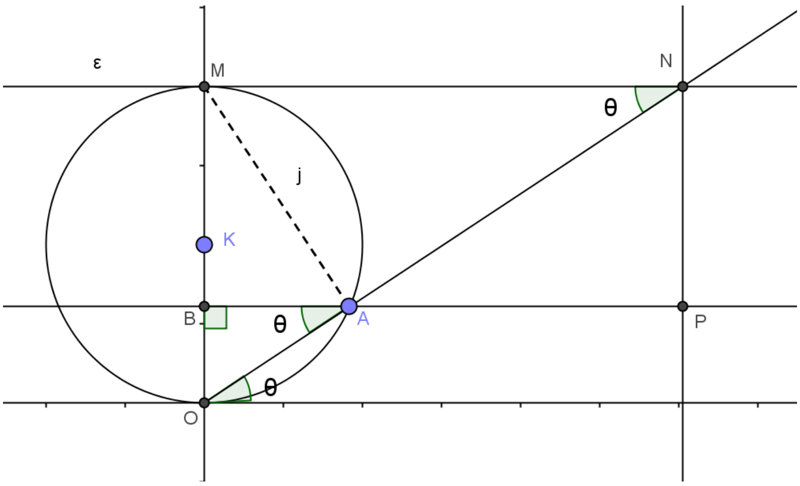
Η τετμημένη του Ν είναι τετμημένη και του Ρ.
Άρα $P\left(\dfrac{2\alpha}{\lambda},\dfrac{2\alpha\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)$.

Έστω (χ,ψ) τυχαίο από τα σημεία Ρ,τότε για κάποια τιμή του $\lambda\in R^*$ έχουμε:

$$\begin{cases} \chi=\dfrac{2\alpha}{\lambda}\neq 0 \\ \psi=\dfrac{2\alpha\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{2\alpha}{\chi} \\ \psi=\dfrac{\frac{8\alpha^3}{\chi^2}}{1+\frac{4\alpha^2}{\chi^2}} \Leftrightarrow \psi=\dfrac{8\alpha^3}{\chi^2+4\alpha^2} \quad (1) \end{cases}$$

.Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (1),
Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η γραφική παράσταση (Μάγισσα της Agnesi) της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{8\alpha^3}{x^2+4\alpha^2}, x\in R$.

<u>2ος τρόπος:</u>



Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ημιευθεία ΟΑ με τον άξονα $\chi'\chi$.Λόγω των παραλληλιών $O\hat{A}B=A\hat{N}M=\theta$,με $0<\theta<\pi$.Έστω $P(x(\theta),y(\theta))$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΟΝ έχουμε: $\sigma\varphi\theta=\dfrac{MN}{OM}=\dfrac{x(\theta)}{2\alpha}\Leftrightarrow x(\theta)=2\alpha\sigma\varphi\theta$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΑ έχουμε: $\eta\mu\theta=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{y(\theta)}{OA}$ (1’).

$\hat{MAO} = 90^0$, ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο,

$\hat{OMA} = \hat{OAB} = \theta$, ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.

Στο τρίγωνο ΑΟΜ έχουμε: $\eta\mu\theta = \frac{OA}{OM} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{OA}{2\alpha} \Leftrightarrow OA = 2\alpha\eta\mu\theta$ (2).

$(1') \Leftrightarrow y(\theta) = OA\eta\mu\theta \overset{(2)}{\Leftrightarrow} y(\theta) = 2\alpha\eta\mu^2\theta$.

Άρα $P\left(2\alpha\sigma\varphi\theta, 2\alpha\eta\mu^2\theta\right)$.

Έστω (x, y) τυχαίο από τα σημεία P ,τότε για κάποια τιμή του $\theta \in (0,\pi)$ έχουμε:

$\begin{cases} x = 2\alpha\sigma\varphi\theta \\ y = 2\alpha\eta\mu^2\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\varphi\theta = \frac{x}{2\alpha} \\ \eta\mu^2\theta = \frac{y}{2\alpha} > 0 \Rightarrow y > 0 \end{cases}$.Όμως $1 + \sigma\varphi^2\theta = \frac{1}{\eta\mu^2\theta} \Leftrightarrow 1 + \frac{x^2}{4\alpha^2} = \frac{2\alpha}{y} \Leftrightarrow$

$y = \frac{8\alpha^3}{x^2 + 4\alpha^2}$.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \frac{8\alpha^3}{x^2 + 4\alpha^2}, x \in R$.

<u>Σημείωση:</u> Οι συντεταγμένες του P είναι η παραμετρική έκφραση της Μάγισσας της Agnesi.

[Πατήστε εδώ για να δείτε το γεωμ.τόπο]

▶ Μονοτονία-Ακρότατα της f

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$f'(x) = -\frac{16\alpha^3 x}{\left(x^2 + 4\alpha^2\right)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$f(0) = 2\alpha$ Ολ.Μέγιστο	↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Για $x=0$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(0)=2\alpha$.

▶ **Κυρτότητα – Σημεία καμπής της C_f**

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=\ldots=\frac{16\alpha^3\left(3x^2-4\alpha^2\right)}{\left(x^2+4\alpha^2\right)^3} .$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4\alpha^2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}\alpha^2 \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha .$$

x	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↺	$f(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha)$ Σημ.Καμπής	⌒	$f(\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha)$ Σημ.Καμπής	↺	

Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha\right],\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha,+\infty\right)$ και κοίλη στο διάστημα $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha,\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha\right]$.

Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει δύο σημεία καμπής τα $\mathrm{K}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha,\frac{3a}{2}\right)$, $\Lambda\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha,\frac{3a}{2}\right)$.

▶ **Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f**

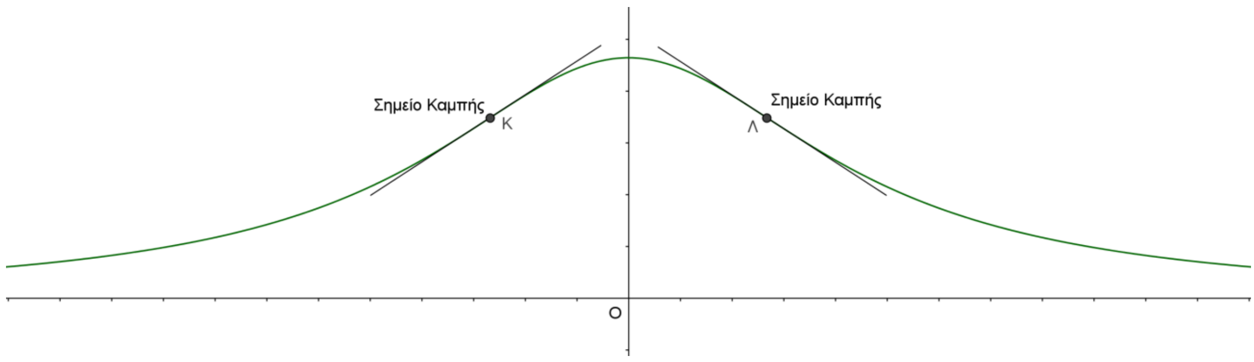
Η f είναι συνεχής στο R ,οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.Άρα ό άξονας $\chi'\chi$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

▶ Γραφική παράσταση της f

Η f είναι άρτια,οπότε η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $\chi'\chi$.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση της f .


Σημείο Καμπής
Κ
Σημείο Καμπής
Λ
O